Fundação Universidade Federal de Pelotas
Disciplina de Álgebra Linear I
Lista 04 de Exercícios - Espaços vetoriais. Subespaços. Combinação linear. Dependência e independência linear. Base.
Prof. Dr. Maurício Zahn

1. Seja $\mathbb{R}^\infty$ o conjunto de todas as sequências infinitas de números reais, ou seja,
$$\mathbb{R}^\infty = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \,:\, x_i \in \mathbb{R}\},$$
munido da operações de adição
$$(x_1, x_2, ..., x_n, ...) + (y_1, y_2, ..., y_n, ...) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n, ...),$$
e multiplicação por escalar
$$\alpha(x_1, x_2, ..., x_n, ...) = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n, ...).$$
Mostre que $\mathbb{R}^\infty$ munido das operações acima é um espaço vetorial.

2. Em $\mathbb{R}^n$ defina as operações
$$\vec{u} \oplus \vec{v} = \vec{u} - \vec{v} \quad \text{e} \quad \alpha \odot \vec{u} = -\alpha \cdot \vec{u}.$$
Quais axiomas de espaço vetorial são satisfeitos para $(\mathbb{R}^n, \oplus, \odot)$?

3. Verifique se são espaços vetoriais os seguintes conjuntos:
   (a) o $\mathbb{R}^2$ munido da adição usual e a multiplicação $\alpha(x, y) = (\alpha x, 0)$.
   (b) o $\mathbb{R}^2$ munido da adição $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + 2x_2, y_1 + 2y_2)$ e a multiplicação por escalar usual.
   (c) o $\mathbb{R}^2$ munido da adição $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (y_1 + y_2, x_1 + x_2)$ e a multiplicação por escalar usual.

4. Mediante quais circunstâncias o conjunto de todos os vetores soluções da equação
$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = c$$
é um subesço vetorial real do $\mathbb{R}^n$?

5. Verifique se o conjunto $W = \{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \,:\, a, b, c \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço vetorial do espaço vetorial $M_{(2,2)}(\mathbb{R})$ das matrizes 2×2 com entradas reais.

6. Quais dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ são subespaços vetoriais? Justifique sua resposta.
   (a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x + 2y = 0 \text{ e } y + z = 0\}$
   (b) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z = 2x + 2y\}$
   (c) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z = 0 \text{ e } x^2 + y^2 \leqslant 1\}$

7. Mostre que os seguintes subconjuntos do $\mathbb{R}^4$ são subespaços vetoriais:
   (a) $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x + y = 0 \;\text{ e }\; z - t = 0\}$.
   (b) $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,:\, 2x + y - t = 0 \;\text{ e }\; z = 0\}$.

8. Considerando os subespaços vetoriais W e S do exercício anterior, determine os subespaços $S \cap W$ e $S + W$.

9. Seja $V = \mathbb{R}^2$ e considere o subconjunto

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : xy \leq 0\}.$$

Desenhe $W \subset \mathbb{R}^2$ e verifique se W é um subespaço vetorial, justificando sua resposta.

10. Seja V o espaço vetorial real de todas as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Quais dos seguintes conjuntos de funções são subespaços de V?

    (a) de todas as funções f tais que $f(x^2) = f(x)^2$.

    (b) de todas as funções f tais que $f(0) = f(1)$.

    (c) de todas as funções f tais que $f(-1) = 0$.

11. Seja V o espaço vetorial de todas as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Seja V_p o subconjunto de todas as funções pares, i.e., tais que $f(-x) = f(x)$; e seja V_i o subconjunto de todas as funções ímpares, i.e., tais que $f(-x) = -f(x)$. Prove que V_p e V_i são subespaços de V.

12. Mostre que se um conjunto W de um espaço vetorial V não contém o vetor nulo, então W não é um subespaço vetorial de V.

13. **(Sel. Mestr. UFSM 2012/1)** Se $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 2}$ é uma matriz 2×2, definimos o seu traço por $\mathrm{tr}\,(A) = a_{11} + a_{22}$. Mostre que o conjunto V das matrizes que têm traço igual a zero é um subespaço vetorial de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

14. Seja B uma matriz fixa em $M_n(\mathbb{R})$. Mostre que os seguintes subconjuntos de $M_n(\mathbb{R})$ são subespaços:

    (a) $V = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \, : \, AB = BA\}$ (b) $U = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \, : \, AB = 0\}$

15. Considere W o conjunto de toda f em $C[0, 1]$ tal que

$$\int_0^1 f(x)dx = 0.$$

W é um subespaço de $C[0, 1]$? Justifique.

16. No espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ consideremos os seguintes sub-espaços vetoriais:

$$S = [(1, -1, 2), (2, 1, 1)], \quad T = [(0, 1, -1), (1, 2, 1)],$$

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x + y = 4x - z = 0\} \;\text{ e }\; V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, 3x - y - z = 0\}.$$

Determine os subespaços $S + T$, $S \cap T$, $T + U$, $T \cap U$, $U \cap V$ e $U + V$.

17. Escreva a matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ como uma combinação linear das matrizes

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \;\; N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \;\text{ e }\; P = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

18. Considere o espaço vetorial $P_2 = \{at^2 + bt + c \, : a, b, c \in \mathbb{R}\}$ e os vetores $p_1 = t^2 - 2t + 1$, $p_2 = t + 2$ e $p_3 = 2t^2 - t$.

(a) Escreva o vetor $p = 5t^2 - 5t + 7$ como combinação linear de p_1, p_2 e p_3.

(b) Determine uma condição para a, b e c de modo que o vetor $at^2 + bt + c$ seja uma combinação linear de p_2 e p_3.

19. Seja $V = C(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, e considere os vetores $f = \cos^2 x$ e $g = \operatorname{sen}^2 x$. Quais dos seguintes vetores pertencem a $[f, g]$?

    (a) $\cos 2x$ (b) $3 + x^2$ (c) 1 (d) $\operatorname{sen} x$ (e) 0

20. Seja V o espaço vetorial das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Mostre que $f, g, h \in V$ dados abaixo são linearmente independentes:

$$f(t) = \operatorname{sen} t, \; g(t) = \cos t \;\text{ e }\; h(t) = t.$$

21. Os vetores $\vec{u}_1 = (1, 1, 2, 4)$, $\vec{u}_2 = (2, -1, -5, 2)$, $\vec{u}_3 = (1, -1, -4, 0)$ e $\vec{u}_4 = (2, 1, 1, 6)$ do $\mathbb{R}^4$ são L.I. ou L.D. ?

22. Mostre que o conjunto de vetores $\{1+x;\ 3x+x^2;\ 2+x-x^2\}$ é um conjunto linearmente independente em P_2.

23. Se $\beta = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é um conjunto de vetores L.I. de um espaço vetorial V, prove que o conjunto $\{\vec{u} - \vec{v}, \vec{u} + \vec{w}, 2\vec{u} - \vec{v} + 2\vec{w}\}$ também é L.I.

24. Se $\beta = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é um conjunto de vetores L.I. de um espaço vetorial V, prove que o conjunto $\{2\vec{u} - \vec{v} + \vec{w},\ \vec{u} + 2\vec{v} - 3\vec{w},\ 3\vec{u} - 4\vec{v} + 5\vec{w}\}$ é L.D.

25. Mostre que, se u, v e w são vetores LI, então $u + v$, $u + w$ e $v + w$ também são LI.

26. Considere $V[a, b]$ como sendo o espaço de todas as funções reais de uma variável real t de $[a, b]$ em $\mathbb{R}$. Mostrar que os seguintes pares de vetores são LI:
    (a) t, t^2. (b) te^t, e^{2t}. (c) $\sin t, \cos t$. (d) $\cos t, \cos 3t$.

27. Defina a *média* $u \star v$ entre os vetores de um espaço vetorial V pondo $u \star v = \dfrac{1}{2}u + \dfrac{1}{2}v$. Prove que $(u \star v) \star w = u \star (v \star w)$ se, e somente se, $u = w$.

28. Dados os espaços vetoriais V_1 e V_2, considere o conjunto $E = V_1 \times V_2$, cujos elementos são os pares ordenados $v = (v_1, v_2)$, onde $v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2$. Defina operações que tornem V um espaço vetorial.

29. **(Sel. Mestrado UFRGS 2004/1)** Sejam $v_1, ..., v_5$ vetores linearmente independentes de um espaço vetorial V. Dado $i = 1, ..., 5$, defina

$$w_i = \sum_{j=1}^{i} v_j.$$

    Prove que $w_1, ..., w_5$ são linearmente independentes.

30. Quais dos seguintes conjuntos formam uma base para $\mathbb{R}^3$?
    (a) $\{(1, 1, -1); (2, -1, 0); (3, 2, 0)\}$ (b) $\{(1, 0, 1); (0, -1, 2); (-2, 1, -4)\}$
    (c) $\{(2, 1, -1); (-1, 0, 1); (0, 0, 1)\}$ (d) $\{(1, 2, 3); (4, 1, 2)\}$

31. Mostrar que os vetores $\overrightarrow{u} = (1, 1, 1)$, $\overrightarrow{v} = (1, 2, 3)$, $\overrightarrow{w} = (3, 0, 2)$ e $\overrightarrow{s} = (2, -1, 1)$ geram o $\mathbb{R}^3$ e encontrar uma base dentre estes vetores.

32. Mostre que $\mathbb{R}^3 = [(1, 1, 1);\ (1, 1, 0);\ (0, 1, 1)]$.

33. Mostre que $P_3 = [x^2 + x^3;\ x;\ 2x^2 + 1;\ 3]$.

34. Mostre que os polinômios $1 - t^3$, $(1 - t^2)$, $1 - t$ e 1 geram o espaço vetorial dos polinômios de grau ≤ 3.

35. Seja $V = \mathbb{R}^3$ e o conjunto $\beta = \{(0, 1, 1); (1, 1, 0); (1, 2, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$.

    (a) Mostre que β não é uma base para $\mathbb{R}^3$.

    (b) Determine uma base para $\mathbb{R}^3$ que possua dois elementos de β.