

VECTORES LINEARMENTE INDEPENDENTES (L.I.) E
LINEARMENTE DEPENDENTES (L.D.)

Def: Dizemos que n vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ em um espaço vetorial V é linearmente independente (L.I.) se, e somente se, na combinação linear for nula quando os escalares envolvidos nessa combinação forem todos nulos, ou seja:

$$\alpha_1 \cdot \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{0} \quad (*)$$

$$\text{se, e só se, } \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$$

Por outro lado, se algum desses escalares for diferente de zero em $(*)$, então dizemos que estes vetores são linearmente dependentes (L.D.)

Sejam os alguns exemplos:

01) $V = \mathbb{R}^2$. Tome $\vec{v}_1 = (1, 2)$ e $\vec{v}_2 = (-3, 5)$

Estes vetores são L.I.; pois:

$$\alpha \cdot \vec{v}_1 + \beta \cdot \vec{v}_2 = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \alpha \cdot (1, 2) + \beta \cdot (-3, 5) = (0, 0)$$

$$\begin{cases} \alpha - 3\beta = 0 \\ 2\alpha + 5\beta = 0 \end{cases}$$

(SISTEMA LINEAR HOMOGÊNEO)

$$\boxed{\alpha = 3\beta}$$

$$2 \cdot (3\beta) + 5\beta = 0$$

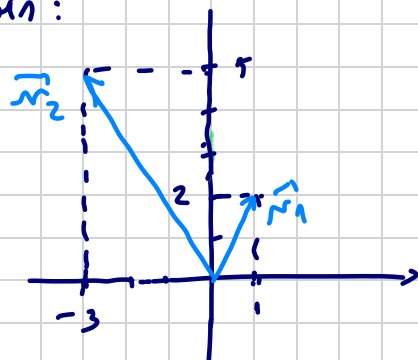
$$6\beta + 5\beta = 0$$

$$11\beta = 0 \Rightarrow \boxed{\beta = 0}$$

$$\alpha = 3\beta$$

$$\alpha = 3 \cdot 0$$

$$\boxed{\alpha = 0}$$



*) um sist. linear é homogêneo quando cada eq. é da forma $a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \dots + a_{i,n}x_n = 0$.

02) $V = \mathbb{R}^3$ e sejam $\vec{v}_1 = (1, -2, 0)$ e $\vec{v}_2 = (2, 2, 1)$. Estes vetores são L.I. ou L.D.?

Solução: Montando a combinação linear, e exigindo que seja nula, temos:

$$\alpha \cdot \vec{v}_1 + \beta \cdot \vec{v}_2 = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \alpha \cdot (1, -2, 0) + \beta \cdot (2, 2, 1) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ -2\alpha + 2\beta = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha + 2 \cdot 0 = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

$\boxed{\beta = 0}$ $\rightarrow$ $\boxed{\alpha = 0}$

Então, os vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são L.I.

03) $\checkmark$ - $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ e sejam

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

os vetores A, B e C são L.I. ou L.D?

SOLUÇÃO: Montando a comb. linear e impondo que seja nula (matriz nula), teremos:

$$\alpha \cdot A + \beta \cdot B + \gamma \cdot C = 0$$

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha + \beta = 0 \\ -2\alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \beta + 3\gamma = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha + \beta = 0 \\ 2\alpha + \beta = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{\beta = -2\alpha}$$

$$\alpha - 2\alpha = 0 \\ -\alpha = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = 0}$$

$$\Rightarrow \beta = -2 \cdot \alpha \Rightarrow \beta = -2 \cdot 0 \Rightarrow \boxed{\beta = 0}$$

$$\alpha - \beta + 3\gamma = 0$$

$$0 - 0 + 3\gamma = 0 \Rightarrow \boxed{\gamma = 0}$$

conclusão: como $\alpha = \beta = \gamma = 0$, então os vetores A, B e C são L.I.

04) $V = P_3$ o espaço vetorial dos polinômios de grau ≤ 3 . sejam $p_1(x) = x + 2$

$$p_2(x) = 3x, \quad p_3(x) = x^2, \quad p_4(x) = 1.$$

Então, p_1, p_2, p_3 e p_4 são L.I. ou L.D.?

solução: Montando a combinação linear, temos:

$$\alpha p_1(x) + \beta p_2(x) + \gamma p_3(x) + \delta p_4(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha \cdot (x+2) + \beta \cdot (3x) + \gamma \cdot x^2 + \delta \cdot 1 = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3$$

$$\alpha x + 2\alpha + 3\beta x + \gamma x^2 + \delta = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3$$

$$\boxed{\gamma = 0}$$

$$\alpha + 3\beta = 0$$

$$2\alpha + \delta = 0$$

Neste caso, encontramos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha + 3\beta = 0 \rightarrow \boxed{\beta = -\frac{\alpha}{3}} \\ 2\alpha + \delta = 0 \rightarrow \boxed{\delta = -2\alpha} \\ \gamma = 0 \end{array} \right.$$

Solução: $\left(\alpha, -\frac{\alpha}{3}, 0, -2\alpha\right) : \alpha \in \mathbb{K}$

Outro jeito, a comb. linear é nula sem que os quatro escalares sejam. Isso significa que os vetores v_1, v_2, v_3 e v_4 não L.D.

05) $V = \mathbb{R}^3$. $\vec{n}_1 = (1, 2, 3)$; $\vec{n}_2 = (-1, 0, 2)$

e $\vec{n}_3 = (0, 2, 5)$. O conjunto $\{\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}$
é L.I ou L.D.?

Solução: Supondo:

$$\alpha \cdot \vec{n}_1 + \beta \cdot \vec{n}_2 + \gamma \cdot \vec{n}_3 = \vec{0}, \text{ determinar:}$$

$$\alpha \cdot (1, 2, 3) + \beta \cdot (-1, 0, 2) + \gamma \cdot (0, 2, 5) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 0 \rightarrow \boxed{\alpha = \beta} \\ 2\alpha + 2\gamma = 0 \\ 3\alpha + 2\beta + 5\gamma = 0 \end{cases}$$

$$3\alpha + 2\alpha + 5\gamma = 0$$

$$5\alpha + 5\gamma = 0 \quad (\div 5)$$

$$\boxed{\alpha + \gamma = 0}$$

$$\boxed{\alpha + \gamma = 0}$$

$$\gamma = -\alpha$$

Logo, determinamos: $\beta = \alpha$ e $\gamma = -\alpha$

Seja ; o sistema homogêneo acima,
tem solução

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha, \alpha, -\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}$$

Logo, os vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ dados não L.D.

Por exemplo, se $\alpha = 1$; então :

$$\beta = 1 \text{ e } \gamma = -1. \text{ e temos:}$$

$$\begin{aligned} 1 \cdot \vec{v}_1 + 1 \cdot \vec{v}_2 - 1 \cdot \vec{v}_3 &= (1, 2, 3) + (-1, 0, 2) - (0, 2, 5) = \\ &= (0, 0, 0) \end{aligned}$$

Proposição: Seja $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ um conjunto
com n vetores em um espaço vetorial V . Então,
este conjunto será L.D. se, e somente se,
um dos vetores do conjunto for uma
combinação linear dos demais vetores.

Demonstre: Seja $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ um conj. de
 n vetores em V .

($\Rightarrow$) Suponha que o conj. seja l.d.

Então, montando a combinação linear

$$\alpha_1 \cdot \vec{v}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \cdot \vec{v}_n = \vec{0},$$

segue que pelo menos um dos escalares α_j seja diferente de zero. Então, escreva:

$$\alpha_1 \cdot \vec{v}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + \alpha_j \cdot \vec{v}_j + \dots + \alpha_n \cdot \vec{v}_n = \vec{0}.$$

Então, isolando $\alpha_j \vec{v}_j$, obtemos:

$$\alpha_j \cdot \vec{v}_j = -\alpha_1 \cdot \vec{v}_1 - \alpha_2 \cdot \vec{v}_2 - \dots - \alpha_{j-1} \cdot \vec{v}_{j-1} - \alpha_{j+1} \cdot \vec{v}_{j+1} - \dots - \alpha_n \cdot \vec{v}_n$$

$$\Rightarrow \vec{v}_j = -\frac{\alpha_1}{\alpha_j} \vec{v}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_j} \vec{v}_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_j} \vec{v}_n,$$

ou seja, $\vec{v}_j$ é combinação linear dos demais vetores do conjunto dado.

($\Leftarrow$) Reciprocamente, suponha que $\vec{v}_j$ seja

comb. linear dos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{j-1}, \vec{v}_{j+1}, \dots, \vec{v}_n$.

A mostrar: o conj. $\{\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n\}$ é L.D.

De fato, pela hipótese, temos:

$$\vec{r}_j = \alpha_1 \vec{r}_1 + \alpha_2 \vec{r}_2 + \dots + \alpha_{j-1} \vec{r}_{j-1} + \alpha_{j+1} \vec{r}_{j+1} + \dots \\ \dots + \alpha_n \vec{r}_n$$

Então:

$$\alpha_1 \vec{r}_1 + \alpha_2 \vec{r}_2 + \dots + \alpha_{j-1} \vec{r}_{j-1} - 1 \cdot \vec{r}_j + \alpha_{j+1} \vec{r}_{j+1} + \dots + \alpha_n \vec{r}_n = \vec{0}$$

$\times$
 $\circ$

Então, o conj. $\{\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n\}$ é L.D..

□

BASE DE UM ESPAÇO VETORIAL:

Na Geometria Analítica foi estudado o $\mathbb{R}^3$, e naquela ocasião destacaram-se três vetores importantes:

$$\vec{x} = (1, 0, 0); \quad \vec{y} = (0, 1, 0) \text{ e } \vec{z} = (0, 0, 1).$$

O conjunto forma por eles: $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$

chama-se uma base do $\mathbb{R}^3$, pois qualquer vetor do $\mathbb{R}^3$ pode ser representado como uma combinação linear desses três vetores.

De fato, dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, tem-se que:

$$\begin{aligned}\underline{(x, y, z)} &= (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z) \\ &= x \cdot \underbrace{(1, 0, 0)}_{\vec{i}} + y \cdot \underbrace{(0, 1, 0)}_{\vec{j}} + z \cdot \underbrace{(0, 0, 1)}_{\vec{k}} \\ &= \underline{x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}}\end{aligned}$$

Essa base chama-se BASE CANÔNICA do $\mathbb{R}^3$.

No que segue, queremos apresentar uma definição mais geral para uma base em um espaço vetorial V qualquer.

Def: Seja V um espaço vetorial. Digamos que um conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ é uma base para V se, e só se:

(i) $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ for L.I.;

(ii) $[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n] = V$.

EXEMPLOS:

$V = \mathbb{R}^3$ e $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ é de fato uma base para $\mathbb{R}^3$, pois:

(i) o conj. é L.I.:

$$\alpha \vec{i} + \beta \vec{j} + \gamma \vec{k} = \vec{0}$$

$$\alpha \cdot (1, 0, 0) + \beta \cdot (0, 1, 0) + \gamma \cdot (0, 0, 1) = \underline{(0, 0, 0)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Logo, o conj.
 $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ é L.I.

$$(i) [\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}] = \mathbb{R}^3.$$

A rigor, devemos provar duas contenções:

$$(\bullet) [\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}] \subset \mathbb{R}^3$$

$$(\bullet\bullet) \mathbb{R}^3 \subset [\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}]$$

Note que $(\bullet)$ sempre vale por def. de subespaço gerado:

$$[\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}] = \{ \alpha \vec{i} + \beta \vec{j} + \gamma \vec{k} : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \} \subset \mathbb{R}^3$$

Basta mostrar apenas $(\bullet\bullet)$.

$$(\bullet\bullet): \mathbb{R}^3 \subset [\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}].$$

Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, vamos mostrar que $(x, y, z) \in [\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}]$. De fato, se

$$(x, y, z) = \alpha \cdot \vec{i} + \beta \vec{j} + \gamma \vec{k}$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z) = \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 0) + \gamma(0, 0, 1)$$

$$\Leftrightarrow (\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha, \beta, \gamma) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \alpha \\ \beta = \beta \\ \gamma = \gamma \end{cases}$$

On reje:

$$(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha \cdot \vec{e}_1 + \beta \cdot \vec{e}_2 + \gamma \cdot \vec{e}_3 \in [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3].$$

Entanto, note (ii)

Logo, a conj. $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ é, de fato uma base para $\mathbb{R}^3$.