CÁLCULO 1A

09/10/25 – AULA 08

Na aula passada estudamos logaritmos:

$$\log_b a = c \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} b^c = a.$$
;

onde $a>0$, com $b>0$, $b \neq 1$.

Vejámmos alguns exemplos de aplicação.,

LISTA 02:

12. Qual é a *meia vida*[1] de um material radioativo que sofre desintegração de 20% de sua massa em um período de 1 ano?

Obs.: A meia-vida de um material radioativo é o tempo necessário para a quantidade de material radioativo caia à metade.

Se hoje temos 100 g de um material radioativo, e se sua meia-vida for de 3 anos, então daqui a 3 anos, teremos metade, ou seja, 50 g. Mais 3 anos e teremos 25 g, e assim por diante.

Voltando ao problema dado:

$t = 0$ (instante inicial) ; $m = m_0$ é a massa inicial de material radioativo.

$t = 1$ ano ; $m = m_0 - \frac{20}{100} m_0$

$$m = m_0 \left(1 - \frac{20}{100}\right)$$

$t = 2$ anos:

$$m = m_0\left(1 - \frac{20}{100}\right) - \frac{20}{100} \cdot m_0 \left(1 - \frac{20}{100}\right)$$

$$m = m_0 \left(1 - \frac{20}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{20}{100}\right)$$

$$\Rightarrow m = m_0 \cdot \left(1 - \frac{20}{100}\right)^2$$

$\vdots$

$t = k \Rightarrow m = m_0 \cdot \left(1 - \frac{20}{100}\right)^k$

$$\Rightarrow m(t) = m_0 \cdot \left(1 - \frac{2\cancel{0}}{10\cancel{0}}\right)^t$$

$$m(t) = m_0 \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right)^t$$

$$m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{5-1}{5}\right)^t$$

$$\boxed{m(t) = m_0 \left(\frac{4}{5}\right)^t}$$

FUNÇÃO EXPONENC. QUE DESCREVE O PROBLEMA.

Queremos saber o valor de t para que

$$m(t) = \frac{m_0}{2}.$$

Disso:

$$\frac{\cancel{m_0}}{2} = \cancel{m_0} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^t$$

$$\frac{1}{2} = \left(\frac{4}{5}\right)^t.$$

Aplicando logaritmos, vem:

$$\log_2 \frac{1}{2} = \log_2 \left(\frac{4}{5}\right)^t$$

$$\log_2 2^{-1} = t \cdot \log_2 \frac{4}{5}$$

$$-1 \cdot \underbrace{\log_2 2}_{=1} = t \cdot \left(\log_2 4 - \log_2 5 \right)$$

$$-1 = t \cdot \left(\log_2 2^{2} - \log_2 5 \right)$$

$$-1 = t \left(2 \underbrace{\log_2 2}_{=1} - \log_2 5 \right)$$

$$-1 = t \cdot \left(1 - \log_2 5 \right)$$

$$\Rightarrow t = \frac{-1}{1 - \log_2 5} \text{ anos.}$$

$t = 0{,}75647$ anos ≈ 9 meses

$\times 12$

LISTA 02

14. Em uma caverna da França, famosa pelas pinturas feitas por homens pré-históricos, foram encontrados pedaços de carvão vegetal, nos quais a radioatividade de C^{14} era $0,145$ vezes a radioatividade num pedaço de carvão feito hoje. Calcule a idade do carvão e dê uma estimativa para a época em que as pinturas foram feitas (Obs.: A meia vida do C^{14} é 5730 anos).

Seja m_0 a quantidade inicial de C^{14}.

Tem-se que hoje: $m(t) = 0,145 \cdot m_0$.

Qual o valor de t para que

$$m(t) = 0,145\, m_0 \; ?$$

A meia-vida do C^{14} é 5730 anos.

$$t = 0 \Rightarrow m = m_0$$

$$t = 5730 \text{ anos} \Rightarrow m = \frac{m_0}{2}$$

$$t = 2 \times 5730 \text{ anos} \Rightarrow m = \frac{m_0}{2^2}$$

$$t = 3 \times 5730 \text{ anos} \Rightarrow m = \frac{m_0}{2^3}$$

$$\vdots$$

$t = K \cdot 5730$ anos $\longrightarrow m(t) = \dfrac{m_0}{2^K}$

$K = \dfrac{t}{5730}$

$$\Rightarrow m(t) = \frac{m_0}{2^{\frac{t}{5730}}} = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2^{\frac{t}{5730}}}\right)$$

$$\boxed{m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}}$$

Queremos obter t para que $m(t) = 0,145\, m_0$

Ou seja:

$$0,145\, \cancel{m_0} = \cancel{m_0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$$

$$0,145 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$$

Aplicando logaritmos decimais, vem:

$$\log 0,145 = \log \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$$

$$\log 0{,}145 = \frac{t}{5730} \cdot \log(0{,}5)$$

$$\Rightarrow t = \frac{5730 \cdot \log 0{,}145}{\log 0{,}5} \text{ anos}$$

$$t \cong 15.963{,}06 \text{ anos}$$

Quando as pinturas foram feitas?

$$2025 - 15963{,}06 \cong$$

$$\simeq 13938{,}06 \text{ anos}$$

antes de Cristo.

FUNÇÃO LOGARÍTMICA:

Def.: Chama-se função logarítmica a função $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=\log_b x\ ,$$

onde $b>0$ e $b\neq 1$.

Note que $y=\log_b x \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} b^y=x$

NOTAÇÃO EXPONENCIAL

Assim, olhando a notação exponencial, temos que $f(x)=\log_b x$ é crescente se $b>1$, e decrescente se $0<b<1$.

Ex.: Esboce o gráfico de $y=\log_2 x$, indicando domínio e imagem.

SOLUÇÃO: CONDIÇÃO DE EXISTÊNCIA:

$$y=\log_2 x \implies x>0.$$

Logo, $x = 0$ é a ASSÍNTOTA VERTICAL.

$$y = \log_2 x \iff 2^y = x.$$

$x = 2^y$	y
1	0
2	1