

FUNÇÕES TRANSCENDENTES:

15/10/25 - AULA 05

Hoje que vamos resolver alguns problemas envolvendo exponenciais e logaritmos.

LISTA 01

33. Qual é a *meia vida* de um material radioativo que sofre desintegração de 20% de sua massa em um período de 1 ano?

Solução: A *meia vida* de um material radioativo é o tempo necessário para que metade desse material se deteriore, tornando este metade estável.

$$t = 0 \Rightarrow m = m_0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{quantidade} \\ \text{inicial de} \\ \text{massa} \\ \text{do material} \\ \text{radioativo} \end{array} \right)$$

$$t = 1 \text{ (ano)} \Rightarrow m = \frac{m_0}{2}$$

$$t = 2 \text{ (anos)} \Rightarrow m = \frac{m_0}{4} = \frac{m_0}{2^2}$$

$$t = 3 \text{ anos} \Rightarrow m = \frac{m_0}{8} = \frac{m_0}{2^3}$$

$$t = k \text{ anos} \Rightarrow m = \frac{m_0}{2^k}$$

$$\Rightarrow m(t) = \frac{m_0}{2^k} = \frac{m_0}{2^t} = m_0 \cdot \frac{1}{2^t}$$

$$= m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$$

$$\Rightarrow m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t. \quad (*)$$

Queremos saber a valor de t para o qual

$$m(t) = 20\% m_0.$$

De (*), vem que:

$$\frac{20}{100} m_0 = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$$

$$\frac{1}{5} = \left(\frac{1}{2}\right)^t$$

Aplicando logaritmos, temos então:

$$\log \frac{1}{5} = \log \left(\frac{1}{2}\right)^t$$

$$\Rightarrow \underbrace{\log 1}_{=0} - \log 5 = t \left(\underbrace{\log 1}_{=0} - \log 2 \right)$$

$$-\log 5 = -t \cdot \log 2 \quad (x-1)$$

$$t = \frac{\log 5}{\log 2} \text{ anos}$$

$$t \approx 2,32 \text{ anos.}$$

LISTA 02

37. Um quadro de Vermeer (1632-1675) ainda contém 99,5% de seu carbono-14 (meia vida de 5730 anos). A partir dessa informação, você pode determinar se o quadro é ou não falsificado? Justifique.

Solução:

$$t = 0 \Rightarrow m = m_0 \quad (\text{quantidade inicial de } C^{14} \text{ presente no quadro})$$

$$t = 5730 \Rightarrow m = \frac{m_0}{2}$$

$$t = 2 \cdot 5730 \Rightarrow m = \frac{m_0}{4} = \frac{m_0}{2^2}$$

$$t = 3 \cdot 5730 \text{ anos} \Rightarrow m = \frac{m_0}{2^3}$$

⋮

$$t = K \cdot 5730 \text{ anos} \Rightarrow m = \frac{m_0}{2^K} = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^K$$

$$\downarrow$$

$$k = \frac{t}{5730}$$

$$m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$$

$$m(t) = \frac{99,5}{100} m_0 \quad \underline{t = ?}$$

$$= \frac{99,5}{1000} m_0$$

On sepe, equacionamos:

$$\frac{99,5}{1000} m_0 = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$$

$$\frac{99,5}{1000} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$$

Aplicando logaritmos, vem:

$$\log \frac{99,5}{1000} = \log \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$$

$$\log \frac{99,5}{1000} = \frac{t}{5730} \cdot \log \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\log(0,995) = \frac{t}{5730} \cdot \log(0,5)$$

$$\Rightarrow t = \frac{5730 \cdot \log(0,995)}{\log(0,5)} \approx 41,44 \text{ anos.}$$

Se seja este quadro tem menos de 42 anos,
então não pode ser de Vermeer (1632-1675)

Portanto, o quadro é falso!



TRIGONOMETRIA

Trigonometria é a parte da Matemática que estuda problemas envolvendo ângulos e lados de triângulos. O nome trigonometria vem do

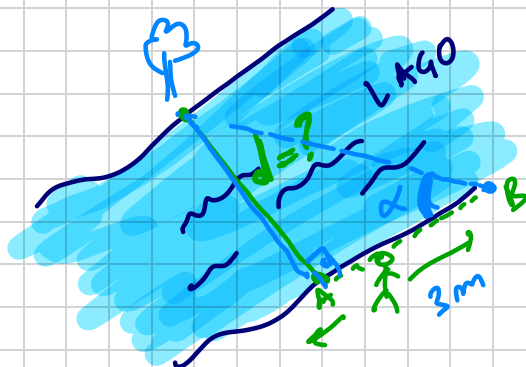
grego: "TRIGONOS" - triângulos.

"METRIA" - medida

As origens da trigonometria são incertas.

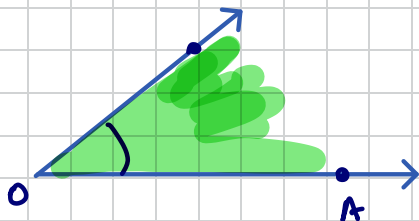
O que se sabe são contribuições de vários povos ao longo dos milênios até se ter hoje o que sabemos sobre a trigonometria.

Os poros do passado usavam-na para resolver problemas envolvendo medidas inaccessíveis, como por exemplo, determinar a largura de um lago.



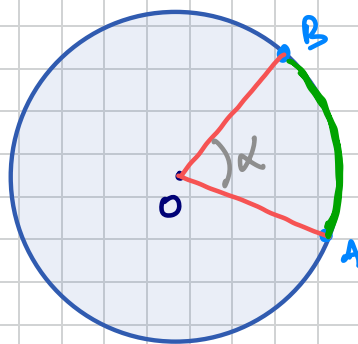
Ao que segue vamos apresentar alguns conceitos básicos para construirmos nossa teoria.

Def: Dadas duas semi-retas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, com mesma origem, chama-se ângulo a região interna por elas construída.



Escrevemos $\alpha = A \hat{O} B$ (ângulo $A \hat{O} B$)

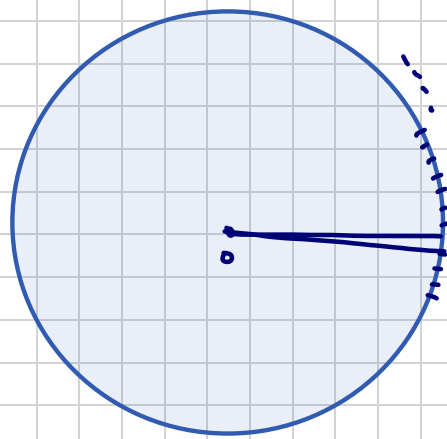
Dada uma circunferência de raio R qualquer, destacando dois pontos A e B sobre esta circunferência; e os raios $\vec{OA}$ e $\vec{OB}$, onde o ponto O é o centro da circunferência, definimos um ângulo central $\alpha = \widehat{AOB}$. E, subtendido a este ângulo central tem-se um arco $\widehat{AB}$ sobre a circunferência.



ARCO $\widehat{AB}$ DETERMINADO
PELO ÂNGULO
 $\alpha = \widehat{AOB}$

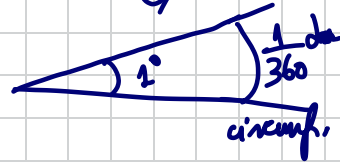
Vamos apresentar um conceito que servirá para medir um ângulo numa circunferência.

Def.: Chamamos -se grau o ângulo central de uma circunferência cujo arco corresponde à fração $\frac{1}{360}$ da mesma. Denotamos o grau por $^{\circ}$.



dividimos a circunferência
em 360 partes
iguais

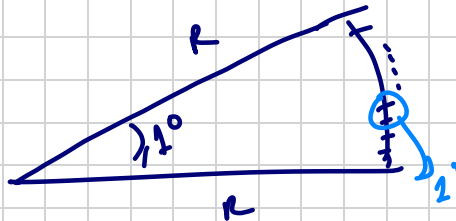
⇒ ZOOM:
↓



ou seja: $1^\circ = \frac{1}{360}$ da circunferência.

SUBMÚLTIPLOS: chama-se minuto a fração
 $\frac{1}{60}$ do grau. Denotamos por

$$1' = \frac{1}{60} \text{ do grau.}$$

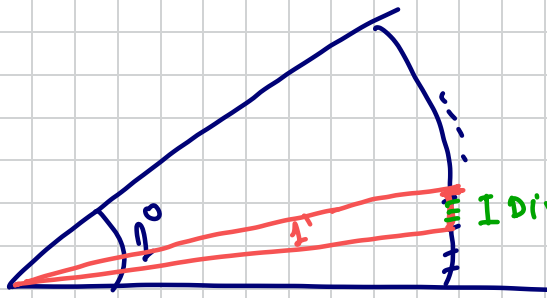


DIVIDE 1° EM 60
PARTES IGUAIS. CADA
PARTE SERÁ $1'$.

chama-se segundo a fração

$\frac{1}{60}$ do minuto. Denotamos por:

$$1'' = \frac{1}{60} \text{ do minuto.}$$



I DIVIDE $1'$ EM 60 PARTES
IGUAIS CADA PARTE
SERÁ $1''$.

Outro seja:

$$1^\circ = 60'.$$

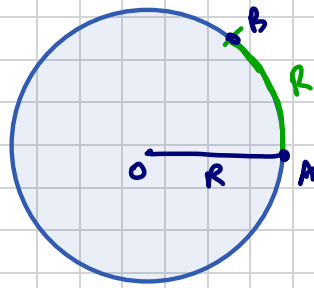
$$1' = 60'' \quad . \quad \text{Assim:}$$

$$\underline{1^\circ = 60' = 60 \cdot 1' = 60 \cdot 60'' = 3600''}.$$

Outra forma de medir ângulos é através do
conceito de RADIANO.

Def.! Chamamos de RADIANO a medida do ângulo
de central de uma circunferência de raio R ,
cujo arco subtendido mede exatamente a medida
do mesmo raio R da circunferência.

NOTAÇÃO PARA RADIANO: rad .



$$\widehat{AB} = 1 \text{ rad.}$$

Questão: Em uma circunferência, quantos radianos se tem? Note que; por regra de três simples;

QUANTIDADE
DE RADIANOS

MEDIDA DO ARCO
NA CIRCUNFERÊNCIA

1 rad

—

R

(pela def.
de rad.)

x

—

$$C = 2\pi R$$

↑
MEDIDA DO COMPRIM.
DA CIRCUNFERÊNCIA

$$2\pi R \cdot 1 \text{ rad} = x \cdot R$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 2\pi \text{ rad}}$$

Ou seja, toda a circunferência comporta $2\pi \text{ rad.}$

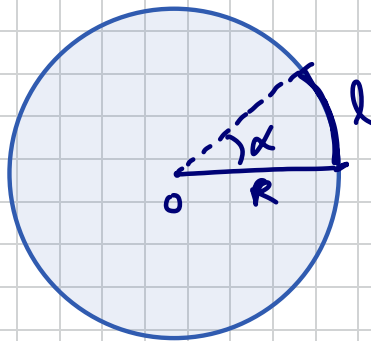
Desse forma, podemos estabelecer uma relação entre grau e radianos, como segue: na circunferência inteira, tem-se:

$$360^\circ \text{ ————— } 2\pi \text{ rad.}$$

Olhando meia circunferência:

$$180^\circ \text{ ————— } \pi \text{ rad.}$$

Dada uma circunferência de raio R , e um arco de comprimento l , como determinar a medida do ângulo central α , em radianos?



$$\alpha = ? \text{ (rad).}$$

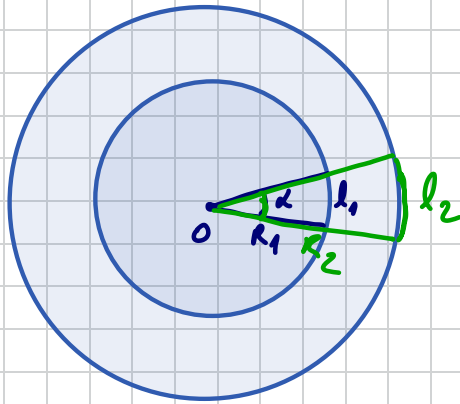
Por regra de três simples, tem-se que:

$$\begin{array}{rcl} 2\pi \text{ rad} & \cancel{\times} & C = 2\pi R \\ \alpha \text{ (rad)} & \text{—} & l \end{array}$$

$$\cancel{2\pi \text{ rad.}} \cdot l = \cancel{2\pi R} \cdot \alpha$$

$$\alpha = \frac{l}{R} \text{ (rad)}$$

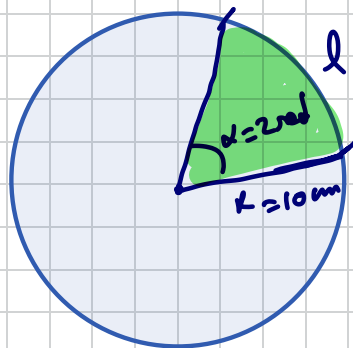
Obs.: Mesmo que R seja maior, o l também será proporcionalmente maior, tornando a razão $\frac{l}{R}$ constante, pois o ângulo α não vai mudar:



$$\alpha = \frac{l_1}{R_1} = \frac{l_2}{R_2} \text{ (rad)}$$

Ex.: Um ângulo central de 2 rad determina um arco em uma circunferência de 10 cm de raio, de que tamanho? Qual a medida de área desse setor circular determinado?

Solução:



$$l = ?$$

$$\alpha = \frac{l}{R}$$

$$\Rightarrow 2\pi r = \frac{l}{10\text{ cm}} \Rightarrow l = 10 \times 2\text{ cm}$$

$$l = 20\text{ cm}$$

A área do setor circular (destacado em verde no desenho) será dada por: (regra de três simples)

PARTE DA CIRCUNF.

ÁREA.

$2\pi R$		πR^2
l		A_{setor}

$$A_{\text{setor}} \cdot 2\pi R = \pi R^2 \cdot l$$

$$A_{\text{setor}} = \frac{\pi R^2 l}{2\pi R}$$

$$A_{\text{setor}} = \frac{1}{2} R \cdot l$$

Assim, voltando ao problema, temos:

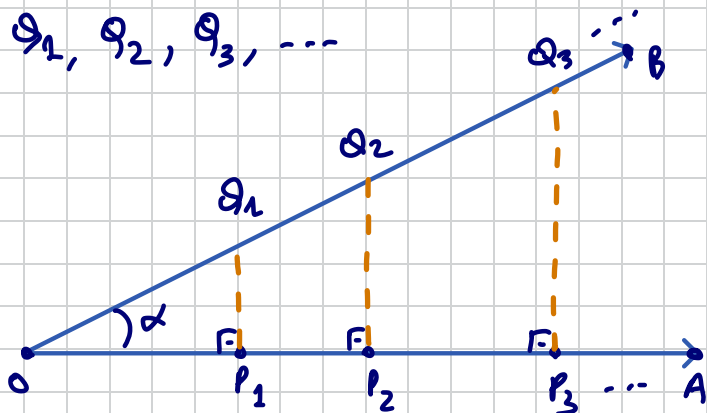
$$\underline{A_{\text{setor}}} = \frac{1}{2} R \cdot l = \frac{1}{2} 10\text{ cm} \cdot 20\text{ cm} = \underline{100\text{ cm}^2}$$

TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Considere um ângulo $\alpha = \widehat{AOB}$, conforme o esquema; onde $\overrightarrow{OA}$ é uma semi-reta horizontal.



Marquemos pontos $P_1, P_2, P_3, \dots$ sobre $\overrightarrow{OA}$, e a partir destes, levantemos as perpendiculares, atingindo a semi-reta $\overrightarrow{OB}$ nos respectivos pontos $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$



Construímos assim uma família de triângulos retângulos $\triangle P_1 Q_1$; $\triangle P_2 Q_2$; $\triangle P_3 Q_3$, ..., todos retos nos pontos $P_2, P_3, \dots$

Note que todos estes triângulos são semelhantes (cosseno ângulo, ângulo, ângulo: AAA)

Disto, tem-se que

$$\gamma_1 = \frac{\overline{P_1 Q_1}}{\overline{O Q_1}} = \frac{\overline{P_2 Q_2}}{\overline{O Q_2}} = \frac{\overline{P_3 Q_3}}{\overline{O Q_3}} = \dots < 1.$$

$$\gamma_2 = \frac{\overline{O P_1}}{\overline{O Q_1}} = \frac{\overline{O P_2}}{\overline{O Q_2}} = \frac{\overline{O P_3}}{\overline{O Q_3}} = \dots < 1.$$

$$\gamma_3 = \frac{\overline{P_1 Q_1}}{\overline{O P_1}} = \frac{\overline{P_2 Q_2}}{\overline{O P_2}} = \frac{\overline{P_3 Q_3}}{\overline{O P_3}} = \dots$$

Def.: No esquema acima, definimos, para o ângulo α , os números:

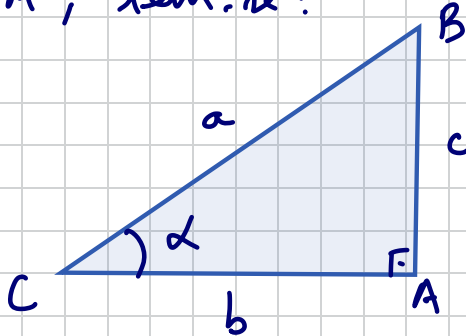
$\text{seno de } \alpha = \gamma_1$; $\text{cosseno de } \alpha = \gamma_2$ e

$\text{tangente de } \alpha = \gamma_3$

Denotamos, respectivamente por:

$\text{sen } \alpha$; $\text{cos } \alpha$; $\text{tan } \alpha$.

Assim, dada um triângulo retângulo ABC ,
reto em A , tem-se:

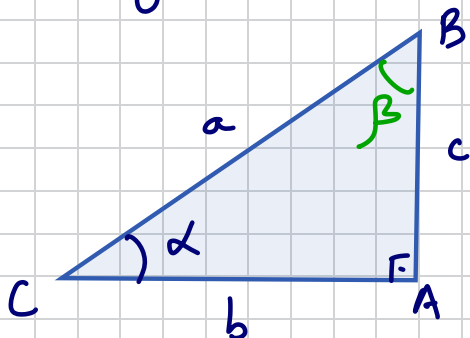


• $\text{sen } \alpha = \frac{c}{a}$ (razão entre o cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa)

• $\text{cos } \alpha = \frac{b}{a}$ (razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa)

• $\text{tan } \alpha = \frac{c}{b}$ (razão entre o cateto oposto e o adjacente)

Num triângulo retângulo tem-se que:



$$\alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

$$\alpha = 90^\circ - \beta$$

Diz-se:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{c}{a}$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \cos \beta$$

$$\cos \beta = \frac{c}{a}$$

$$\operatorname{sen}(90^\circ - \beta) = \cos \beta$$

RELAÇÃO DE ARCOS
COMPLEMENTARES.

$$\cos \alpha = \frac{b}{a}$$

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow \cos \underbrace{\alpha}_{90^\circ - \beta} = \operatorname{sen} \beta$$

$$\Rightarrow \cos(90^\circ - \beta) = \operatorname{sen} \beta$$

Se o teorema de Pitágoras, temos que:

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \div (a^2)$$

$$\frac{\cancel{a^2}}{\cancel{a^2}} = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2}$$

$$1 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2$$

$$\Rightarrow 1 = (\cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2$$

Se simplificarmos a equação, usamos:

$$(\sin \alpha)^2 = \sin^2 \alpha$$

$$(\cos \alpha)^2 = \cos^2 \alpha$$

e então, chega-se ao resultado:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

chamada de relação trigonométrica funda-

mental, mas FRACA, pois só vale para
 $0 < \alpha < 90^\circ$.

(pois foi deduzida usando triângulos retângulos).

A posteriori provaremos que vale para qualquer ângulo.

