FUNÇÕES TRANSCENDENTAIS:

08/10/25 - AULA 04

FUNÇÕES LOGARÍTMICAS:

Def.: Chama-se função logarítmica a função $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_b x$, onde $b > 0$ e $b \neq 1$.

Note que:

$$y = \log_b x \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \underbrace{b^y}_{0 <} = x. \Longrightarrow x > 0$$

$D(f) = (0, +\infty)$

a reta vertical $x = 0$ (eixo x) é chamada de ASSÍNTOTA VERTICAL.

PROPOSIÇÃO: Dada a função logarítmica $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_b x$, tem-se que f é crescente se $b > 1$, e f é decrescente se $0 < b < 1$.

DEMONSTR:

- considere $b > 1$. Vamos mostrar que f é crescente; ou seja;

se $x < y$, mostraremos que $f(x) < f(y)$.

De fato; por absurdo, se $f(x) \geq f(y)$.

Então, temos:

$$\log_b x \geq \log_b y \text{ ; e como } b > 1,$$

segue que $x \geq y$. [Lembre do estudo de inequações]

Mas isso é uma contradição com a hipótese de $x < y$. Absurdo!

Portanto, $f(x) = \log_b x$, com $b > 1$ é crescente.

De forma similar se mostra que

$f(x) = \log_b x$, com $0 < b < 1$ é decrescente

$\square$

EXEMPLOS: Esboce o gráfico de cada função abaixo, indicando domínio e imagem.

(a) $f(x) = \log_2(x-1)$.

SOLUÇÃO: $y = \log_2 \underbrace{(x-1)}$

$\hookrightarrow x - 1 > 0$

$\Rightarrow x > 1.$

$\Rightarrow D(f) = (1, +\infty)$

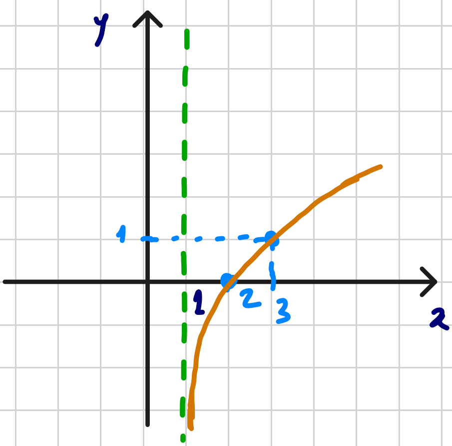
$Im(f) = \mathbb{R}.$

ASSÍNTOTA VERTICAL: $x = 1.$

$$y = \log_2(x-1) \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} 2^y = x - 1.$$

$$\Longleftrightarrow x = 1 + 2^y$$

$x = 1 + 2^y$	y
$1 + 2^0 = \underline{\underline{2}}$	$\underline{\underline{0}}$
$1 + 2^1 = \underline{\underline{3}}$	1



$y = \log_2(x-1)$.

(b) $f(x) = 1 + 2\log_2(1-2x)$.

$$1-2x>0$$
$$-2x>-1 \qquad \times(-1)$$
$$2x<1 \qquad \div(2)$$
$$\boxed{x<\frac{1}{2}}$$
$$\Downarrow$$
$$D(f) = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$$

$Im(f) = \mathbb{R}$.

ASSÍNTOTA VERTICAL:

$$x = \frac{1}{2}$$

Esboço gráfico:

$$y = 1 + 2.\log_2(1-2x)$$
$$\Updownarrow$$
$$y-1 = 2\log_2(1-2x)$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{y-1}{2} = \log_2(1-2x)$$
$$\Updownarrow \text{def.}$$
$$2^{\frac{y-1}{2}} = 1-2x$$
$$\Updownarrow$$

$$\Updownarrow$$

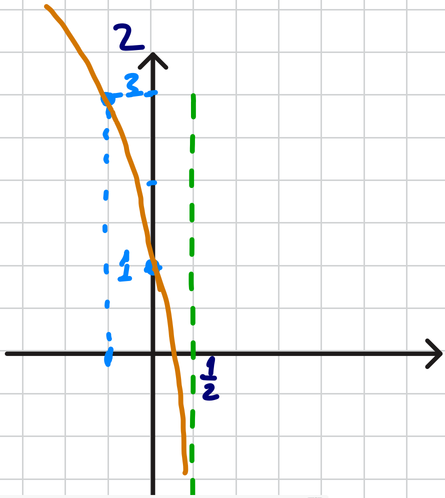
$$2x = 1 - 2^{\frac{y-1}{2}}$$

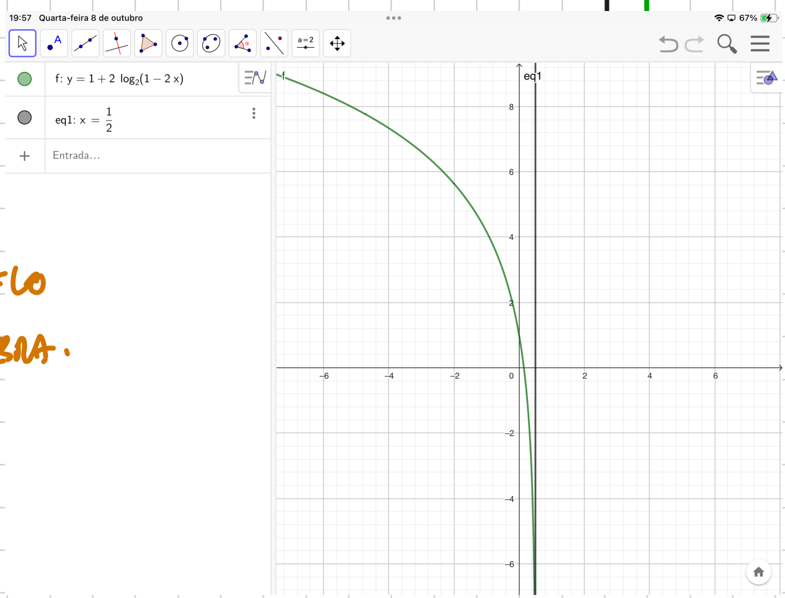
$$\Updownarrow$$

$$x = \frac{1 - 2^{\frac{y-1}{2}}}{2}$$

$x = \dfrac{1-2^{\frac{y-1}{2}}}{2}$	y
$\dfrac{1-2^{0}}{2} = 0$	1
$\dfrac{1-2^{\frac{2}{2}}}{2} = -\dfrac{1}{2}$	3

$\Longrightarrow$





ESBOÇO PELO GEOGEBRA.

No que segue, mostraremos que as funções exponencial e logarítmica são uma inversa da outra.

Antes disso, temos os seguintes resultados:

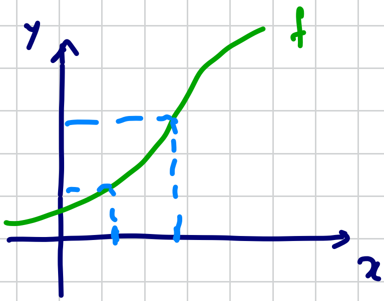
Def.: Dizemos que uma função $f: A \to B$ é injetiva (injetora) se, e só se,

$$f(a) = f(b) \Rightarrow a = b,$$

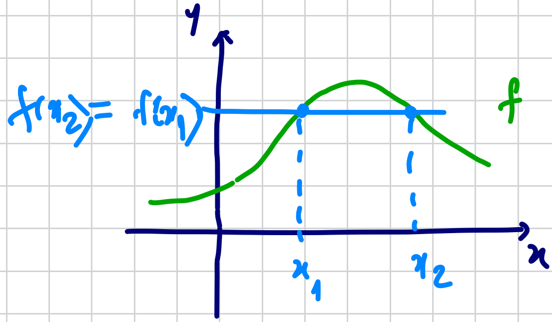
ou, de forma transpositiva:

$$a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b).$$

Em palavras: $f: A \to B$ é injetiva se domínios diferentes tiverem imagens também diferentes.



f é injetiva.



f não é injetiva, pois há domínios diferentes mas com mesma imagem.

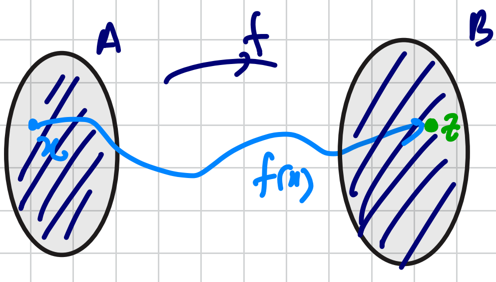
$x_1 \neq x_2$, mas $f(x_1) = f(x_2)$

Def.: Dizemos que $f: A \to B$ é sobrejetiva se, e só se, $f(A) = B$. Ou seja, todo conjunto B (contradomínio de f) é imagem de todo o domínio A, mediante a f.

Simbolicamente:

$$f: A \to B \text{ é sobrejetiva} \iff$$

$$\forall z \in B, \ \exists x \in A \text{ tal que } f(x) = z.$$



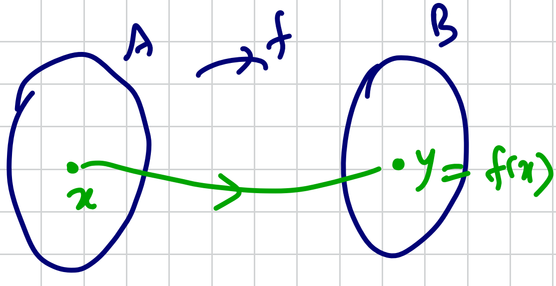
$Im(f) = B$.

Def.: Dizemos que $f: A \to B$ é bijetiva se, e somente se, for injetiva e sobrejetiva.
Mais precisamente, $f: A \to B$ é bijetiva se, e só se, $\forall\, y \in B$ $\underbrace{\exists!}_{}$ $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

EXISTE UM ÚNICO.

(ISTO GARANTE A INJETIVIDADE NA DEFINIÇÃO DADA)

Questão: Dada $f: A \to B$ uma função, que é tal que, dado $x \in A$, manda x para $y \in B$; ou seja, $f(x) = y$



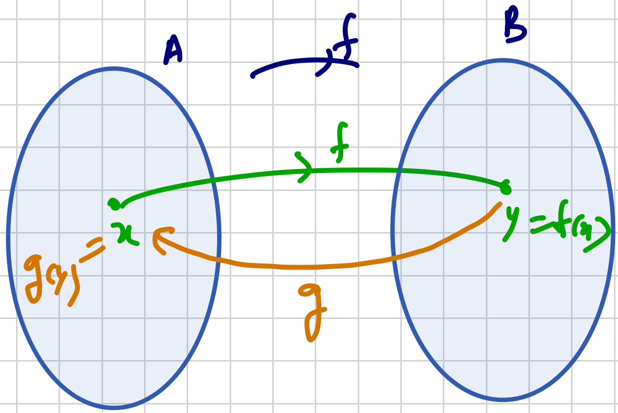
Ou seja: $f: A \to B$
$x \longmapsto f(x) = y$

Perguntamos: dado $y \in B$, é possível .

recuperar $x \in A$, mediante uma função $g: B \to A$? E que condições tal g deve cumprir? (em palavras: quando é possível fazer o caminho contrário?)

↳ nem sempre é possível.

Se tal $g: B \to A$ existir, ela é chamada de INVERSA DE $f: A \to B$



Ou seja, se $g: B \to A$ é a inversa de $f: A \to B$, então, devemos ter que:

$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x)) = x$$

$$y \xrightarrow{g} g(y) \xrightarrow{f} f(g(y)) = y$$

Ou seja:

$$(g\circ f): A \to A,$$
$$(g\circ f)(x) = x$$

$$(f\circ g): B \to B$$
$$(f\circ g)(y) = y$$

Isto define o seguinte conceito:

Def: Dizemos que $f: A \to B$ é inversível se, e só se, existir $g: B \to A$, tal que

$$g\circ f: A \to A,$$
$$(g\circ f)(x) = x \quad , \forall x \in A$$

e

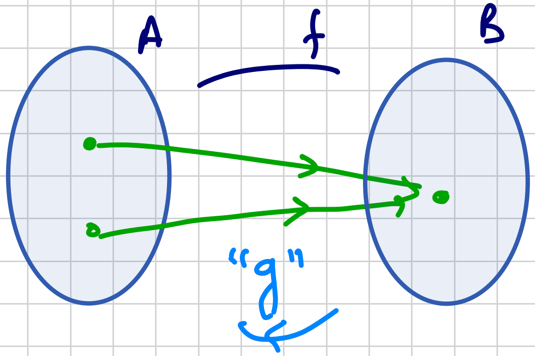
$$f\circ g: B \to B$$
$$(f\circ g)(y) = y, \quad \forall y \in B.$$

Neste caso, denotamos a inversa por

$$g = f^{-1}.$$

Note que, para $f: A \to B$ ser inversível, deve-se ter que f é bijetiva.

De fato, se $f: A \to B$ não for injetiva, teríamos situações como por exemplo:



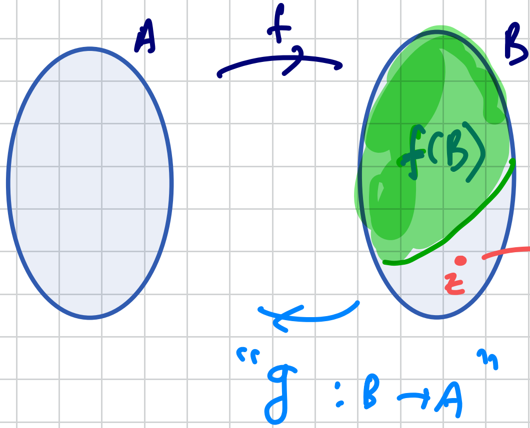
Neste caso temos $f: A \to B$ que não é injetiva. Então a $g: B \to A$ levaria um elemento de B para dois lugares diferentes em A.

Logo $g: B \to A$ não é função.

Por isso, para que $f: A \to B$ seja inversível, devemos exigir injetividade.

Mas não é só isso. É necessário exigir também sobrejetividade.

De fato, vamos considerar uma $f: A \to B$ que não seja sobrejetiva.



tem elementos do domínio de "$g: B \to A$" que não possuirão imagem! Isso contradiz o conceito de função!

CONCLUSÃO: para que $f: A \to B$ seja inversível deve-se exigir que f seja bijetiva (injetiva e sobrejetiva).

PROPOSIÇÃO: A função $f: \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, $f(x) = a^x$ é inversível, e a sua inversa é

$$g: (0,+\infty) \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \log_a x. \quad (a>0;\ a \neq 1)$$

[OU SEJA, A INVERSA DA FUNÇÃO EXPONENCIAL É A LOGARÍTMICA, E VICE-VERSA].

DEMONSTR.:

De fato; basta notar que:

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(a^x) = \log_a a^x = x.$$

e

$$(f\circ g)(y) = f(g(y)) = f(\log_a y) = a^{\log_a y} = y$$

$\square$

Também poderíamos mostrar que:

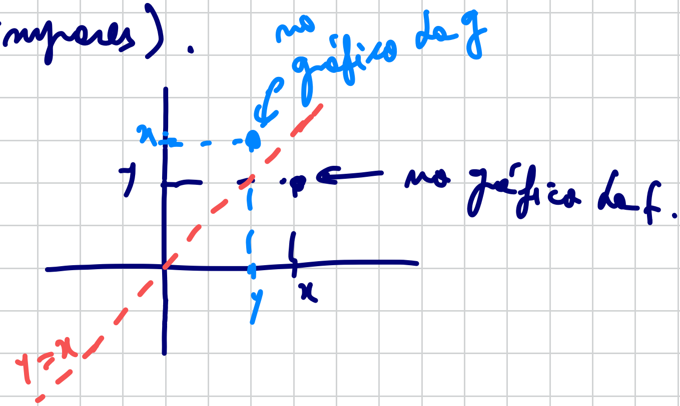
- f é bijetiva.
- g é bijetiva.
- de $y = f(x)$, isola o $x = g(y)$.

Obs: Dado $f: A \to B$, $y = f(x)$ inversível, então, os pontos do gráfico da f são da forma $(x, f(x)) = (x, y)$.

Já os pontos do gráfico da inversa

$g: B \to A$; $x = g(y)$, serão da forma $(y, g(y)) = (y, x)$

Ou seja, tem-se um <u>espelhamento</u> em relação à reta $y = x$ (bissetriz dos quadrantes ímpares).



Vejamos um exemplo:

Ex.: Seja $f: \mathbb{R} \to B$ a função dada por

$$f(x) = 1 + 2^x.$$

Determine B de modo a f ser inversível. Em seguida, obtenha a função inversa $g: B \to \mathbb{R}$, colocando os gráficos de f e de g num mesmo plano cartesiano.

<u>SOLUÇÃO</u>: $f(x) = 1 + 2^x$, $f: \mathbb{R} \to B$.

f é injetiva, pois $f(x) = 1 + 2^x$ é crescente (pois $a = 2 > 1$). Assim: $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ (i.e., $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$). Ou seja, f é injetiva.

Além disso, note que:

$$y = 1 + 2^x \Rightarrow y - 1 = 2^x > 0$$

$$\Rightarrow y - 1 > 0 \Rightarrow y > 1.$$

$$Im(f) = (1, +\infty) := B$$

Assim, $f: \mathbb{R} \to (1, +\infty)$, $f(x) = 1 + 2^x$ é também sobrejetiva.

Portanto, f é bijetiva. Logo, inversível.

Assim, $\exists\ g: (1, +\infty) \to \mathbb{R}$, e é tal que

$x = g(y)$, onde

$y = 1 + 2^x$ (BASTA ISOLAR o x)

$y - 1 = 2^x$

$$\Rightarrow \log_2 (y-1) = \log_2 2^x = x.$$

$$\Rightarrow x = g(y) = \log_2 (y-1)$$

CONCLUSÃO: $g : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$,

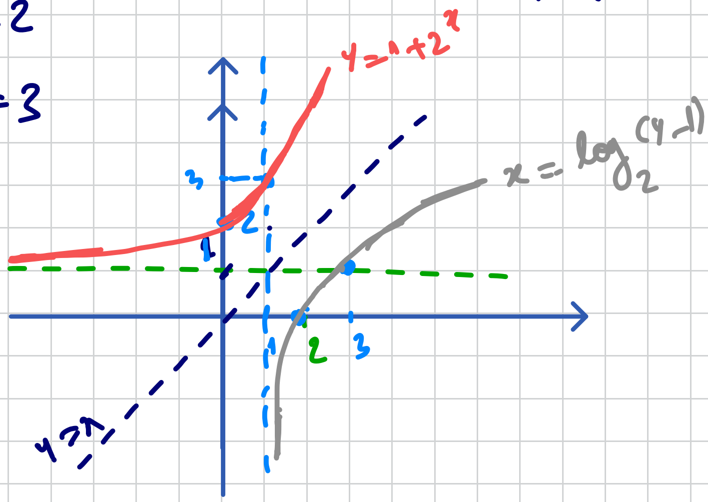
$$g(y) = \log_2 (y-1)$$

Esboço gráfico: (FAREMOS O GRÁFICO DA EXPONENCIAL E USAREMOS O ESPELHAMENTO EM $y=x$ PARA OBTER O GRÁFICO DA INVERSA g).

$y = 1 + 2^x$. $\Leftrightarrow$ $y - 1 = 2^x \Rightarrow y > 1$.

x	$y = 1 + 2^x$
0	$1 + 2^0 = 2$
1	$1 + 2^1 = 3$

ASSÍNTOTA HORIZONTAL: $y = 1$.



PELO GEOGEBRA.