

Na aula passada iniciamos o estudo de logaritmos

$$\log_b a = c \stackrel{\text{def}}{\iff} b^c = a.$$

NOTAÇÃO EXPONENCIAL

Disso, tem-se que $\log_b a = c$; onde

- $c \in \mathbb{R}$
- $a > 0$
- $b > 0$ e $b \neq 1$.

Vamos revisar propriedades, dentre elas as operatórias:

$$\bullet \log_c (a \cdot b) = \log_c a + \log_c b$$

(PROVADA NA
AULA
PASSADA)

$$\bullet \log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$$

$$\bullet \log_c a^m = m \cdot \log_c a.$$

Provemos a última igualdade:

Então

$$\log_c a^m = x \quad \text{e} \quad m \cdot \log_c a = y$$

Dele def. de logaritmo:

$$c^x = a^m \quad (I)$$

Além disso, de $m \cdot \log_c a = y$, temos:

$$\log_c a = \frac{y}{m}$$

$$\Rightarrow c^{\frac{y}{m}} = a \quad (II)$$

Comparando (I) e (II), obtemos:

$$c^x = a^m = \left(c^{\frac{y}{m}} \right)^m = c^y$$

$$\Rightarrow c^x = c^y \Rightarrow x = y$$

On seja ;

$$\log_c a^m = x = y = m \cdot \log_c a$$

□

Nó que segue vamos estudar o importante teorema de mudança de base.

TEOREMA (MUDANÇA DE BASE) Sejam $a > 0$ e $b, c > 0$, com $b, c \neq 1$. Então:

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

DEMONSTRAÇÃO:

$$\text{Sejam } \log_b a = x$$

$$\log_c a = y$$

$$\log_c b = z$$

Vamos mostrar que $x = \frac{y}{z}$. De fato,

basta aplicar a definição de logaritmo em cada uma das três igualdades:

$$\bullet \log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a \quad (I)$$

$$\bullet \log_c a = y \Leftrightarrow c^y = a \quad (II)$$

$$\bullet \log_c b = z \Leftrightarrow c^z = b \quad (III)$$

Combinando (I), (II) e (III), obtemos:

$$\underline{c^{zx}} = \underline{(c^z)^x} = \underline{b^x} = a = c^y$$

$\uparrow \quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow$
(III) (I) (II)

$$\Rightarrow c^{zx} = c^y \Rightarrow z \cdot x = y \Rightarrow \boxed{x = \frac{y}{z}}$$

$$\underline{\log_b a} = x = \frac{y}{z} = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

Vejam os alguns exemplos de aplicação:

01) Calcule o valor de:

(a) $\log_8 128 = ?$

↑
COMO $128 = 2^7$ E $8 = 2^3$,
AMBOS POTÊNCIAS DE 2,
É CONVENIENTE PASSAR
PARA A BASE 2

$$\log_8 128 = \frac{\log_2 128}{\log_2 8} = \frac{\log_2 2^7}{\log_2 2^3} = \frac{7 \cdot \log_2 2}{3 \cdot \log_2 2} = \frac{7}{3}$$

(b) $\log_2 5 \cdot \log_{25} 8 = ?$

VAMOS MUDAR

PARA A BASE 2,
NA TENTATIVA DE PROCURAR
UMA SIMPLIFICAÇÃO.

$$\log_2 5 \cdot \log_{25} 8 = \log_2 5 \cdot \frac{\log_2 8}{\log_2 25} = \frac{1}{\log_2 5} \cdot \frac{\log_2 2^3}{\log_2 5^2} = \frac{1}{\log_2 5} \cdot \frac{3 \cdot \log_2 2}{2 \cdot \log_2 5} = \frac{3}{2}$$

$$= \log_2 5 \cdot \frac{\log_2 2^3}{\log_2 5^2} = \cancel{\log_2 5} \cdot \frac{3 \cdot \log_2 2}{2 \cdot \cancel{\log_2 5}} = \frac{3}{2} //$$

02) calcule:

$$y = \log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \dots \cdot \log_{62} 61 \cdot \log_{63} 62 \cdot \log_{64} 63$$

$$= \frac{\log_2 2}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 3}{\log_2 4} \cdot \frac{\log_2 4}{\log_2 5} \cdot \dots \cdot \frac{\log_2 62}{\log_2 63} \cdot \frac{\log_2 63}{\log_2 64}$$

VAMOS PASSAR
PARA A BASE 2,
COM O OBJETIVO
DE EFETUAR
SIMPLIFICAÇÕES.

$$= \frac{1}{\log_2 64} = \frac{1}{\log_2 2^6} =$$

$$= \frac{1}{6 \log_2 2} = \frac{1}{6} //$$

"CAMPEANDO" A INTERNET:

Exercício 12. Se $\log_8 225 = a$, então $\log_2 15$ vale:

- (a) $\frac{\sqrt{a}}{4}$ (b) $\frac{a}{4}$ (c) $\frac{3a}{2}$ (d) $\frac{2a}{3}$ (e) $3a - 1$

$$a = \log_8 225 = \frac{\log_2 225}{\log_2 8} = \frac{\log_2 15^2}{\log_2 2^3} =$$

$$= \frac{2 \cdot \log_2 15}{3 \log_2 2}$$

$$\Rightarrow a = \frac{2 \cdot \log_2 15}{3} \Rightarrow \boxed{\log_2 15 = \frac{3a}{2}}$$

EQUAÇÕES LOGARÍTMICAS:

Def.: Uma equação logarítmica é toda eq. cuja variável está presente nos logaritmos.

Ex: $\log_2 (x+1) = 3$ é uma equação

logarítmica.

$x + \log_2 2 = 1$ não é uma eq. logarítmica.

$x \cdot \log_2 2 = \log_2 x$ é uma
equação logarítmica.

Para resolver uma equação logarítmica não podemos nos esquecer das condições de definição do logaritmo.

Ou seja, $\log_b a = c$; $a > 0$ e $b > 0$; $b \neq 1$.

Vejam os exemplos:

Resolver cada equação abaixo:

01) $\log_3 x = -2$.

Solução: Note que devemos ter $x > 0$.

Aplicando a definição, temos:

$$\log_3 x = -2 \Leftrightarrow 3^{-2} = x$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{9} > 0$$

$$S = \left\{ \frac{1}{9} \right\}.$$

$$02) \log_2 (9-x^2) = \log_2 (3-x)$$

$$\log_b A = \log_b B \Leftrightarrow A=B$$

$$\Leftrightarrow 9-x^2 = 3-x \quad (*)$$

$$\underline{\text{Obs:}} \left\{ \begin{array}{l} 9-x^2 > 0 \\ 3-x > 0 \end{array} \right\} \text{ CONDIÇÕES DE EXISTÊNCIA.}$$

Resolvendo (*), vem:

$$x^2 - x + 3 - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2}$$

$$x = \frac{1+5}{2} = 3$$

ou

$$x = \frac{1-5}{2} = -2$$

Verificando as condições de existência:

$$x=3: \left\{ \begin{array}{l} 9-3^2 = 0 \\ - \end{array} \right. \quad \underline{\text{NÃO SATISFAZ A 1ª CONDIÇÃO.}}$$

$$x=-2: \left\{ \begin{array}{l} 9-(-2)^2 = 9-4 = 5 > 0 \quad \underline{\text{OK!}} \\ 3-(-2) = 5 > 0 \quad \underline{\text{OK!}} \end{array} \right.$$

solução: $S = \{-2\}$.

03) $\log_2 x + 4 \cdot \log_2 8 = 16$

- CONDIÇÃO DE EXISTÊNCIA: $x > 0$

$$\log_2 x + \log_2 8^4 = 16$$

$$\log_2 x \cdot 8^4 = 16. \Leftrightarrow 2^{16} = x \cdot 8^4$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2^{16}}{8^4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2^{16}}{(2^3)^4} = \frac{2^{16}}{2^{12}}$$

$$\Leftrightarrow x = 2^{16-12} = 2^4 = \underline{16}$$

COND. DE EXISTÊNCIA:

$$x = 16 > 0. \quad \underline{\text{OK!}}$$

sol. $S = \{16\}$.

$$04) \log_x (2x+5) = 1. \Leftrightarrow x^1 = 2x+5$$

$$\Leftrightarrow x = 2x+5$$

CONDIÇÕES DE EXISTÊNCIA:

- $x > 0$
- $x \neq 1$.
- $2x+5 > 0$.

$$\Leftrightarrow x - 2x = 5$$

$$\Leftrightarrow -x = 5$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = -5}$$

$$x = -5 < 0$$

$$\log_x; S = \emptyset.$$

NOTAÇÃO: Quando a base do logaritmo for 10, escrevemos $\log_{10} a = \log a$, e é chamado de LOGARITMO DECIMAL.

Uma outra base importante que se usa é a base e , onde e é o número irracional $e \cong 2,7182818284590\dots$, chamado de NÚMERO DE EULER.

Este número aparece em vários fenômenos da natureza e, dessa forma, surge em vários problemas envolvendo equações diferenciais.

Neste caso, escrevemos:

$$\log_e x = \ln x,$$

e é chamado de LOGARITMO NATURAL ou LOGARITMO NEPERIANO.

Com o que estudamos de logaritmos, voltamos a um problema de exponenciais que ficou em aberto na aula passada:

EXERCÍCIO: A taxa de crescimento de uma população de um determinado país é de aproximadamente 3% ao ano. Se a taxa continuar a mesma, em quantos anos a população desse país irá dobrar?

Vamos que a função que descreve o problema é dada por:

$$q(t) = q_0 \cdot \left(\frac{103}{100}\right)^t;$$

onde q_0 denota a população inicial.

Qual o valor de t (anos) para que

$$q(t) = 2 \cdot q_0?$$

$$2 \cancel{q_0} = \cancel{q_0} \cdot \left(\frac{103}{100}\right)^t$$

$$2 = \left(\frac{103}{100}\right)^t.$$

A única maneira de isolar t será através de logaritmos. Aplicando $\log$ (decimal), vem:

$$\log 2 = \log \left(\frac{103}{100}\right)^t$$

$$\log 2 = t \cdot (\log 103 - \log 100)$$

$$\log 2 = t \cdot (\log 103 - \underbrace{\log 10^2}_{10} \Rightarrow 2)$$

$$\log 2 = t \cdot (\log 103 - 2)$$

$$\Rightarrow t = \frac{\log 2}{\log 103 - 2} \quad \text{anot.}$$

$$t \approx 23,4497 \text{ anot}$$

$$\approx 23 \text{ anot} + \underbrace{0,4497 \text{ anot}}_{\times 12}$$

$$\approx 23 \text{ anot} \quad 5 \text{ meses} + \underbrace{0,397 \text{ mes}}_{30}$$

$$\approx 23 \text{ anot} \quad 5 \text{ meses} \quad 11 \text{ dias.}$$

INEQUAÇÃO LOGARÍTMICA: É toda inequação na qual a variável encontra-se num logaritmo.

ex: $\log_3(4x-6) < 0$.

Da mesma forma que fizemos com as inequações exponenciais, vamos precisar de uma propriedade semelhante para resolver inequações logarítmicas.

prop: Dada a inequação $\log_a f(x) \leq \log_a g(x)$;

então:

(i) se $a > 1$, segue que $f(x) \leq g(x)$

(ii) se $0 < a < 1$, segue que $f(x) \geq g(x)$.

O mesmo vale para as outras desigualdades.

DEMONSTRAÇÃO:

(i) suponha $a > 1$. Temos o problema

$$\log_a f(x) \leq \log_a g(x)$$

Escreva $\log_a f(x) = p$ e $\log_a g(x) = q$.

Então, temos $p \leq q$.

Da def. de logaritmo, segue que:

$$a^p = f(x) \quad \text{e} \quad a^q = g(x)$$

Como $a > 1$, por hipótese, segue que a função exponencial $y = a^x$ é crescente.

Então, sendo $p \leq q$, temos que

$$\underbrace{a^p}_{f(x)} \leq \underbrace{a^q}_{g(x)} \Rightarrow f(x) \leq g(x)$$

□

Vejaamos exemplo:

Resolver cada inequação abaixo:

(a) $\log_3 (4x-6) < 0$.

← NÃO PODEMOS USAR
DEFINIÇÃO DE LOGARITMOS
POIS NÃO TEMOS UMA
IGUALDADE

$\log_3 (4x-6) < \log_3 1$; $3 > 1$.

$$\Rightarrow 4x-6 < 1.$$

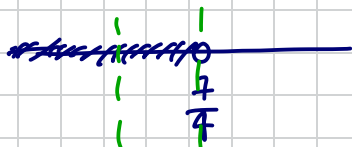
$$4x < 1+6$$

$$4x < 7 \Rightarrow \boxed{x < \frac{7}{4}}$$

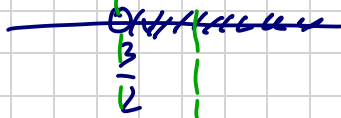
Temos de explorar/cuidar a condição de existência:

$$4x-6 > 0 \Rightarrow 4x > 6$$

$$\Rightarrow x > \frac{6}{4} \Rightarrow \boxed{x > \frac{3}{2}}$$



"SOLUÇÃO PARCIAL"



"COND. DE EXISTÊNCIA"



INTERSEÇÃO
POIS DEVEMOS
SATISFAZER AS
DUAS DESIGUALDADES
SIMULTANEAMENTE

$$S = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{4} \right)$$

$$(b) \log_2 (7x-2) \leq 6$$

$$\text{COND. DE EXISTÊNCIA: } 7x-2 > 0$$

$$\Rightarrow 7x > 2 \Rightarrow$$

$$x > \frac{2}{7}$$

~~ou~~
 $\frac{2}{7}$

$$\log_2 (7x-2) \leq 6 = \log_2 2^6$$

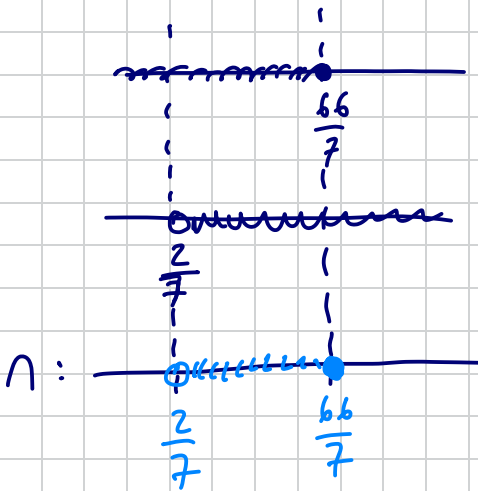
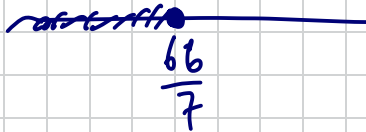
$$\log_2 (7x-2) \leq \log_2 64$$

$$|b=2 > 1|$$

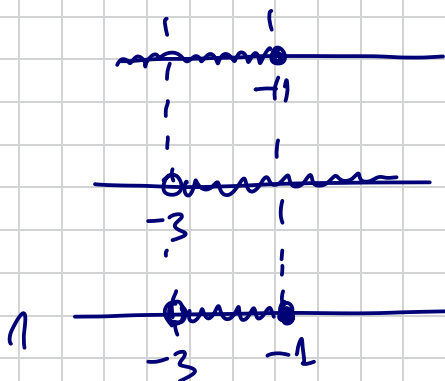
$$\Rightarrow f(x) \leq g(x)$$

$$\Rightarrow 7x - 2 \leq 64$$

$$\Rightarrow 7x \leq 66 \Rightarrow \boxed{x \leq \frac{66}{7}}$$



$$S = \left(\frac{2}{7}, \frac{66}{7} \right]$$



$$S = (-3, -1].$$

