CÁLCULO I A

07/10/25 – AULA 07

No final da aula passada estudamos a função exponencial. Vamos a mais um exemplo:

Ex.: Esboce o gráfico da função

$$y = -1 + 2^{2-x},$$

indicando domínio e imagem.

Solução: Note que: $y = -1 + \underbrace{2^{2-x}}_{>0}$

$\boxed{a^x > 0}$

$$\Rightarrow \quad y+1 = \underbrace{2^{2-x}}_{>0}$$

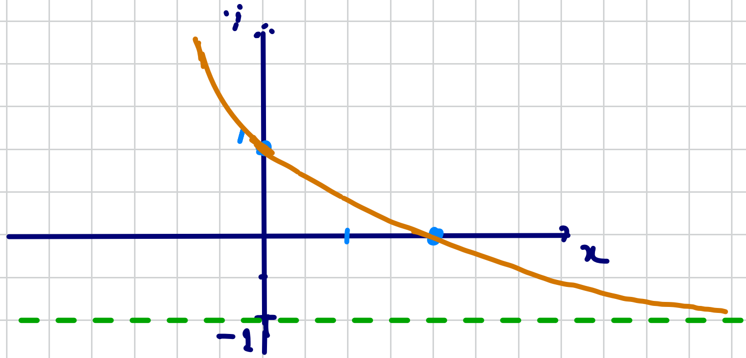
$$\Rightarrow \quad y+1>0 \Rightarrow y > -1$$

$$Im(f) = (-1, +\infty)$$

Como não há restrição para a variável x, segue que $D(f) = \mathbb{R}$.

ASSÍNTOTA HORIZONTAL: $y = -1$.

x	$y = -1 + 2^{2-x}$
0	$-1 + 2^{2-1} = -1+2 = 1$
2	$-1 + 2^0 = -1+1 = 0$



$$y = -1 + 2^{2-x}$$

No que segue vamos introduzir um novo conceito a partir de um exemplo prático.

LISTA 02:

9. Uma pessoa deposita uma quantia em um banco que remunera à taxa de 1% ao mês. Em quantos meses a quantia depositada dobrará?

Solução: Seja q_0 a quantia inicial.

- quando $t = 1$ (mês), teremos:

$$q = q_0 + \frac{1}{100} q_0 = q_0\left(1 + \frac{1}{100}\right)$$

- quando $t = 2$, teremos:

$$q = q_0\left(1 + \frac{1}{100}\right) + \frac{1}{100} \cdot q_0\left(1 + \frac{1}{100}\right)$$

$$= q_0\left(1+\frac{1}{100}\right)\cdot\left[1+\frac{1}{100}\right]$$

$$= q_0\cdot\left(1+\frac{1}{100}\right)^2$$

- quando $t = 3$ meses, temos:

$$q = \underbrace{q_0\left(1+\frac{1}{100}\right)^2} + \frac{1}{100}\cdot \underbrace{q_0\left(1+\frac{1}{100}\right)^2}$$

$$= q_0\left(1+\frac{1}{100}\right)^2\cdot\left[1+\frac{1}{100}\right]$$

$$= q_0\left(1+\frac{1}{100}\right)^3.$$

$$\vdots$$

- quando $t = k$ meses, temos:

$$q = q_0\cdot\left(1+\frac{1}{100}\right)^k$$

Ou seja, a função que descreve o problema é

$$q(t) = q_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{100}\right)^t = q_0 \cdot \left(\frac{100+1}{100}\right)^t$$

$$\Rightarrow q(t) = q_0 \cdot \left(\frac{101}{100}\right)^t$$

Queremos obter o valor de t para o qual se tenha $q(t) = 2 \cdot q_0$.

$$2\cancel{q_0} = \cancel{q_0} \left(\frac{101}{100}\right)^t$$

$$2 = \left(\frac{101}{100}\right)^t ,$$

é uma <u>equação exponencial</u> (equação com variável no expoente), que, até então não conseguimos resolver, pois para resolver uma equação exponencial, a ideia consiste em procurar deixar uma igualdade de mesma base, pois com isso, os expoentes serão iguais.

Por exemplo, se tivermos:

$$2^{x-1} = 16 \quad . \quad (\text{eq. exponencial})$$

Neste caso, conseguimos igualdade de mesma base:

$$2^{x-1} = 2^4 \Rightarrow x-1 = 4 \Rightarrow$$

Mas $2 = \left(\frac{101}{100}\right)^t$ não tem como se estabelecer uma igualdade de mesma base.

Para resolver esse impasse introduz-se o conceito de logaritmo. A ideia do logaritmo consiste em transformar operações complicadas em operações mais simples. Como por exemplo: somar números reais é mais fácil do que multiplicar números reais.

Por exemplo, construímos a tabela:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	...

Por exemplo, calculemos

128×32.

$$\begin{array}{r} \scriptstyle 2\quad \\ 128 \\ \times\ 32 \\ \hline 256 \\ \scriptstyle 1\qquad\ \\ +\ 384\ \ \\ \hline 4096 \end{array}$$

Mas, olhando na tabela das potências, tem-se, correspondentemente:

$$5 + 7 = 12$$

$$32 \times 128 \qquad 4096$$

Esta ideia foi o que inspirou o conceito de logaritmo.

Def.: Dados $a > 0$ e $b > 0$, $b \neq 1$. Chama-se logaritmo de a na base b, ao expoente $c \in \mathbb{R}$ ao qual se deve elevar a base b de modo a se obter a. Simbolicamente, escreve-se:

$$\log_b a = c \overset{\text{def.}}{\iff} b^c = a$$

NOTAÇÃO EXPONENCIAL PARA O LOGARITMO, QUE TAMBÉM JUSTIFICA O FATO DE QUE DEVEMOS TER $a > 0$ e $b > 0$, $b \neq 1$.

Ex.: $2^3 = 8 \iff 3 = \log_2 8$

$$3^{-2} = \frac{1}{9} \iff -2 = \log_3 \frac{1}{9}$$

PROPOSIÇÃO: Valem as seguintes propriedades:

(a) $\log_a 1 = 0$

(b) $\log_a a = 1$

(c) $\log_a a^m = m$

(d) $a^{\log_a b} = b.$

(e) $\log_a A = \log_a B \iff A = B$

(f) $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

(g) $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

(h) $\log_b a^m = m \cdot \log_b a$.

OBS.: As propriedades (f), (g) e (h) são chamadas de PROPRIEDADES OPERATÓRIAS DOS LOGARITMOS.

DEMONSTR.: Todas elas são provadas usando a definição de logaritmo. Vejamos a prova de algumas.

(a) $\log_a 1 = 0$:

Escreva $\log_a 1 = x$. Vamos mostrar que $x = 0$.

De fato:

$$\log_a 1 = x \overset{\text{def.}}{\iff} a^x = 1 = a^0 \iff$$

$$\iff a^x = a^0 \iff \boxed{x = 0}$$

conclusão: $\underbrace{\log_a 1} = x = \underbrace{0}$

(b) $\log_a a = 1$:

Escreve $\log_a a = x$. A mostrar: $x = 1$.

De facto: $\log_a a = x \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} a^x = a^1 \Leftrightarrow x = 1$

conclusão: $\log_a a = x = 1$.

(c) $\log_a a^m = m$:

Escreve $\log_a a^m = x$. A mostrar: $x = m$.

$$\log_a a^m = x \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} a^x = a^m \Leftrightarrow x = m.$$

conclusão:

$$\log_a a^m = x = m$$

Ex.: $\log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$.

(f) $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$:

Escreva $\log_a xy = \alpha$;

$\log_a x = \beta$;

e

$\log_a y = \gamma$

Vamos mostrar que $\alpha = \beta + \gamma$. De fato:

- $\log_a xy = \alpha \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} a^{\alpha} = x \cdot y$ (I)

- $\log_a x = \beta \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} a^{\beta} = x$ (II)

- $\log_a y = \gamma \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} a^{\gamma} = y$ (III)

Combinando (I), (II) e (III), obtemos:

$$a^{\alpha} = x \cdot y = a^{\beta} \cdot a^{\gamma} = a^{\beta+\gamma}$$

$$\Longrightarrow \quad a^{\alpha} = a^{\beta+\gamma} \quad \Longleftrightarrow \quad \underset{\log_a xy}{\overset{\shortparallel}{\alpha}} = \underbrace{\beta}_{\log_a x} + \underbrace{\gamma}_{\log_a y}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \log_a xy = \log_a x + \log_a y \, .$$

$\square$

Ex. 1 $\log_3 81 = ?$

SOLUÇÃO: podemos resolver de várias formas:

- $\log_3 81 = x \overset{def}{\Longleftrightarrow} 3^x = 81$

$$\Longleftrightarrow 3^x = 9 \cdot 9 = 3^2 \cdot 3^2 = 3^4$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{x = 4}$$

- $\log_3 81 = \log_3 9 \cdot 9 = \log_3 9 + \log_3 9$

$$= \log_3 3^2 + \log_3 3^2 =$$

$$= 2.\underbrace{\log_3 3}_{=1} + 2.\underbrace{\log_3 3}_{=2} = 2 + 2 = 4$$

<u>NOTAÇÃO</u>: Quando a base b for 10, chamamos de LOGARITMO DECIMAL, e escrevemos

$$\log_{10} a = \log a.$$

Quando a base for o número de Euler

$$e \cong 2,71828\ldots \quad (\text{irracional}),$$

o logaritmo de base e chama-se logaritmo natural ou NEPERIANO, e escrevemos:

$$\log_e a = \ln a$$

Costuma-se usá-lo devido a vários fenômenos na natureza que "produzem" este número irracional.

Voltando ao problema da taxa 1%:
(LISTA 02)

9. Uma pessoa deposita uma quantia em um banco que remunera à taxa de 1% ao mês. Em quantos meses a quantia depositada dobrará?

Obtemos a função que descreve o problema:

$$q(t) = q_0 \cdot \left(\frac{101}{100}\right)^t.$$

E encontramos:

$$2 = \left(\frac{101}{100}\right)^t.$$

Aplicando logaritmo (qualquer base, usemos a base 10):

$$\log 2 = \log \left(\frac{101}{100}\right)^t$$

$$\log 2 = t \cdot \log\left(\frac{101}{100}\right)$$

$$t = \frac{\log 2}{\log\left(\frac{101}{100}\right)} = \frac{\log 2}{\log 101 - \log 100}$$

$$= \frac{\log 2}{\log 101 - \underbrace{\log_{10} 10^2}_{2}}$$

$$= \frac{\log 2}{\log 102 - 2}$$

$\cong$ 69,66 meses $\cong$ 5,8 anos.