CÁLCULO 1A

02/10/25 – AULA 06

Encerramos a aula passada estudando a função modular. Vejamos outros exemplos:

Esboce o gráfico de $f(x) = x^2 - 4.|x| + 3$; indicando domínio e imagem.

SOLUÇÃO: Como $|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$,

o problema dado se transforma em:

$$f(x) = x^2 - 4.|x| + 3 = \begin{cases} x^2 - 4x + 3, & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 - 4.(-x) + 3, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3, & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 + 4x + 3, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

1º: $y = x^2 - 4x + 3$. $x \geq 0$.

zeros:

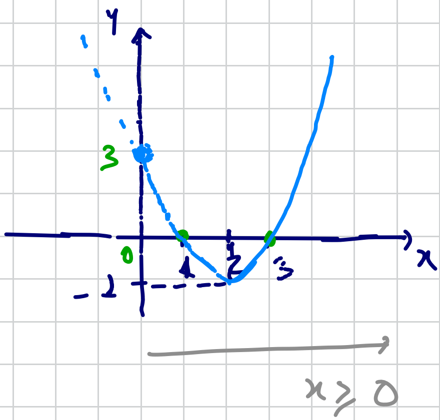
$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x = \frac{+4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} \rightarrow \Delta$$

$$x = \frac{4 \pm 2}{2} \quad \begin{array}{l} \nearrow x = \frac{6}{2} \Rightarrow x = 3 \\ \searrow x = \frac{4-2}{2} \Rightarrow x = 1 \end{array}$$

$V(x_v, y_v)$;

$$\left.\begin{array}{l} x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-4)}{2 \cdot 1} = 2 \\ y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{4}{4 \cdot 1} = -1 \end{array}\right\} V(2, -1)$$



$f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 3$
$= 3$

$\underline{\underline{2^o}}$: $y = x^2 + 4x + 3$; $x < 0$

zeros: $x^2 + 4x + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm 2}{2}$$

Δ

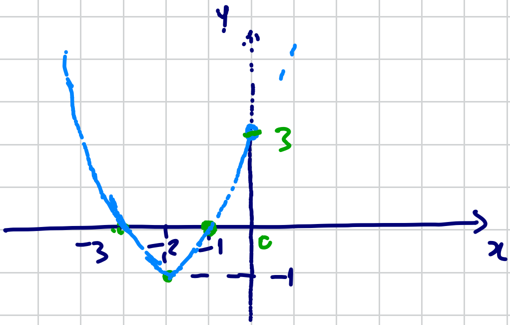
$x = \frac{-4+2}{2} = -1$ ou

$x = \frac{-4-2}{2} = -3$

$V(x_v, y_v)$; onde:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2.1} = -2$$

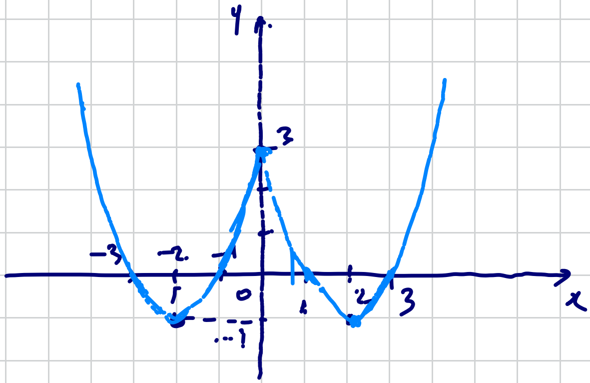
$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{4}{4.1} = -1.$$



$\Rightarrow V(-2, -1).$

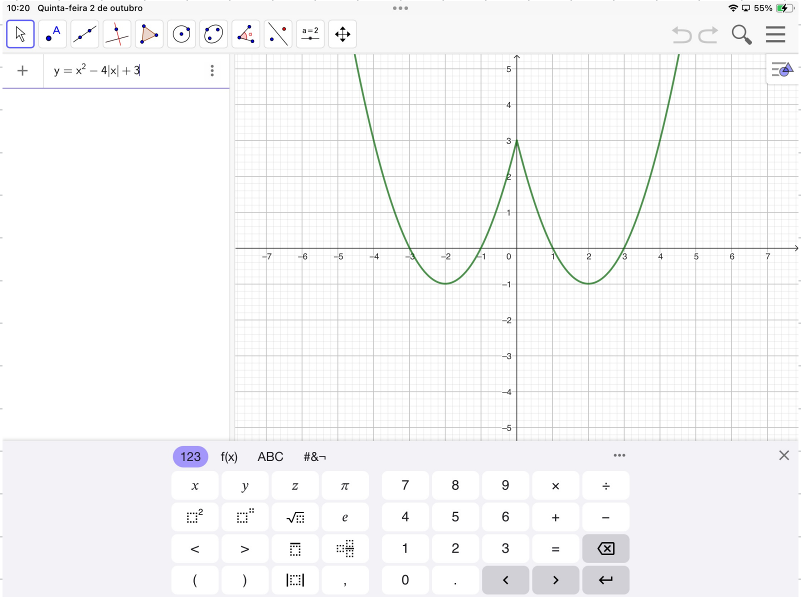
$x = 0 \Rightarrow y = 0^2 + 4.0 + 3 = 3$

Combinando os dois casos, obtemos o esboço gráfico de f:



$D(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = [-1, +\infty)$



PELO GEOGEBRA.

02) Esboce o gráfico de $f(x) = |x+1| + |x-1|$, indicando domínio e imagem.

Solução: Visto que:

- $$|x+1| = \begin{cases} x+1, & \text{se } x+1 \geq 0 \\ -(x+1), & \text{se } x+1 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x+1, & \text{se } x \geq -1 \\ -x-1, & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

- $$|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{se } x-1 \geq 0 \\ -(x-1), & \text{se } x-1 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x-1, & \text{se } x \geq 1 \\ -x+1, & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x+1| = -x-\cancel{1} \\ |x-1| = -x+\cancel{1} \end{cases} \quad + \quad \underline{} \quad -2x$$

$$\begin{cases} |x+1| = \cancel{x}+1 \\ |x-1| = -\cancel{x}+1 \end{cases} \quad + \quad \underline{} \quad 2$$

$$\begin{cases} |x+1| = x+\cancel{1} \\ |x-1| = x-\cancel{1} \end{cases} \quad + \quad \underline{} \quad 2x$$

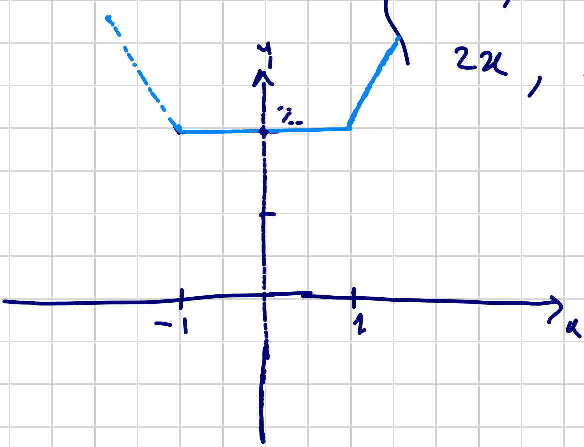
-1 $\qquad$ 1

$|x+1|+|x-1| = -2x$ $\qquad$ $|x+1|+|x-1| = 2$ $\qquad$ $|x+1|+|x-1| = 2x$

1 E −1: PONTOS DE "QUEBRA" DAS SENTENÇAS QUE DEFINEM A FUNÇÃO $f(x)$.

Assim, obtemos:

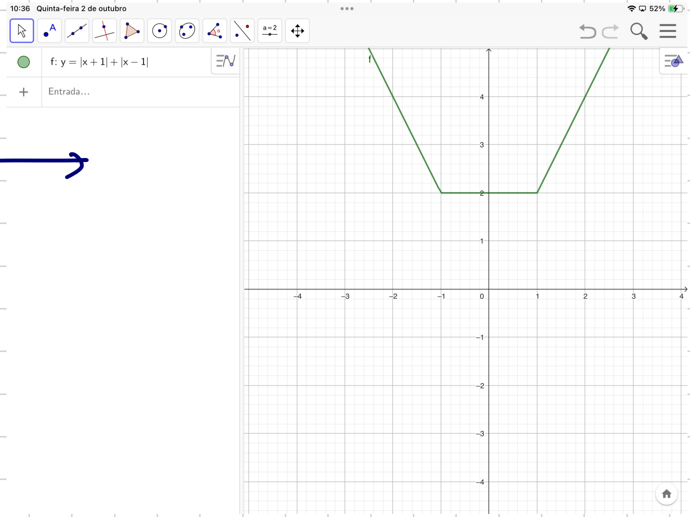
$$f(x) = |x+1| + |x-1| = \begin{cases} -2x, & \text{se } x < -1 \\ 2, & \text{se } -1 \leq x < 1. \\ 2x, & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$



$D(f) = \mathbb{R}$.

$Im(f) = [2, +\infty)$

ESBOÇO PELO GEOGEBRA. $\longrightarrow$



FUNÇÃO EXPONENCIAL:

Def.: Chama-se função exponencial a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=a^x$, onde $a>0$ e $a\neq 1$.

E por quê devemos exigir que a base a seja maior que zero e diferente de 1? De fato:

- se $a=1$; teríamos $f(x)=1^x=1$, uma função constante (não é exponencial)

- se $a=0$; teríamos $f(x)=0^x$, o que gera inconsistência, pois:

$$0^x = \begin{cases} 0, & \text{se } x > 0 \\ \text{indeterminado}, & \text{se } x = 0 \\ \nexists, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

$$0^0 = 0^{1-1} = 0^1 \div 0^1 = \frac{0}{0}$$

$$0^{-2} = \frac{1}{0^2} = \frac{1}{0} \nexists$$

- se $a < 0$, então, $f(x) = a^x$ não é real para certos valores de x. Por exemplo, seja $a = -2 < 0$, e então, considere

$$f(x) = (-2)^x.$$

Em particular,(*) $f\left(\frac{3}{2}\right) = (-2)^{3/2} = \sqrt{(-2)^3}$

$$= \sqrt{-8} \notin \mathbb{R}.$$

Por isso, para $f(x) = a^x$, exige-se que

$$a > 0 \text{ e } a \neq 1.$$

(*) Lembre-se da notação de radical:

$$\sqrt[m]{a^p} = a^{\frac{p}{m}}$$

PROPOSIÇÃO: A função exponencial $f(x) = a^x$ é crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$.

DEMONSTR.: Considere $a > 1$.

Então, se $x < y$, vamos mostrar que $f(x) < f(y)$, ou seja, f é crescente.

Como $x < y$, segue que $\exists\, m > 0$ tal que

$$x + m = y$$

Queremos mostrar que $f(x) < f(y)$, ou seja, que $a^x < a^y$.

Por absurdo, suponha que $a^x \geq a^y$.

Então:

$$a^x \geq a^y = a^{x+m} = a^x \cdot a^m$$

$$\Rightarrow \quad a^x \geq a^x \cdot a^m$$

$$\Rightarrow \quad a^x - a^x \cdot a^m \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad a^x (1 - a^m) \geq 0$$

Como $a^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$,

segue que $1 - a^m \geq 0$

$$\Rightarrow -a^m \geq -1 \quad (\times -1)$$

$$a^m \leq 1,$$

pois se $x > 0$; $a^x > 0$

se $x = 0$; $a^x = a^0 = 1 > 0$

se $x < 0$; $-x > 0$, e $a^x = \dfrac{1}{\underbrace{a^{-x}}_{>0}} > 0$

onde $a > 1$ e $m > 0$,

um absurdo!

Portanto, $a^x < a^y$, sempre que $x < y$, ou seja, mostramos que $f(x) = a^x$; $a > 1$ é crescente.

Considere agora o caso $0 < a < 1$.

Vamos mostrar que $f(x) = a^x$ é decrescente.

Considere $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \left(\dfrac{1}{a}\right)^x$.

Como $0 < a < 1$, então $\dfrac{1}{a} > 1$.

Então, pelo provado anteriormente, segue que $g(x) = \left(\dfrac{1}{a}\right)^x$ é crescente. Assim:

$x < y \implies g(x) < g(y) \implies \left(\frac{1}{a}\right)^x < \left(\frac{1}{a}\right)^y \implies$

$$\implies \frac{1}{a^x} < \frac{1}{a^y} \implies a^x > a^y$$

$$\implies f(x) > f(y) \;;$$

ou seja, $f(x) = a^x$; com $0 < a < 1$ é decrescente.

$\square$

ESBOÇO GRÁFICO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL:

Considere $f(x) = a^x$; $a > 1$ (crescente)

Como $a^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, segue que

$$Im(f) = (0, +\infty)$$

Além disso, $y = a^x$ tem sentido, $\forall x \in \mathbb{R}$.

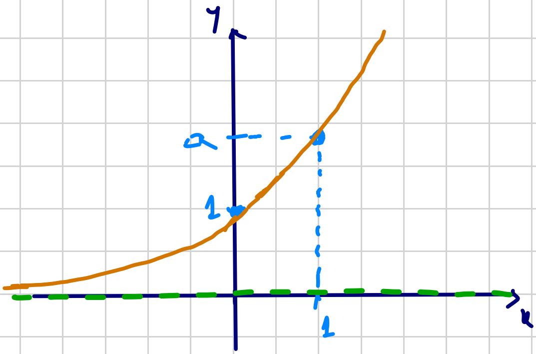
Logo, $D(f) = \mathbb{R}$.

$y = 0$ divide o plano cartesiano em duas regiões: onde há gráfico e onde não há.

Por essa razão, a reta horizontal $y = 0$ chama-se ASSÍNTOTA HORIZONTAL.

Esboço gráfico. Tome 2 pontos numa tabela:

x	$y = a^x$
0	$a^0 = 1$
1	$a^1 = a > 1$



EXEMPLOS:

01) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x > 0 \Rightarrow y > 0.$

$Im(f) = (0, +\infty)$

$0 < a = \frac{1}{2} < 1$

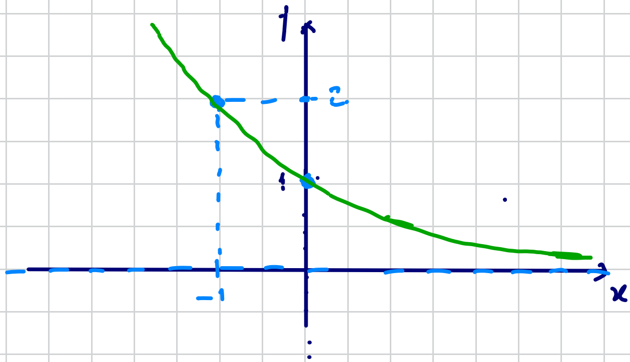
$D(f) = \mathbb{R}.$

função decrescente.

ASSÍNTOTA HORIZONTAL: $y = 0$

Esboço gráfico:

x	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
0	$\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$
-1	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$



02) $y = 1 + 2^{1-2x}$.

Solução: $y - 1 = 2^{1-2x} > 0 \Rightarrow y - 1 > 0$

$y > 1$.

$Im(f) = (1, +\infty)$

ASSÍNTOTA HORIZONTAL:

$y = 1$.

$D(f) = \mathbb{R}$.

Esboço gráfico

x	$y = 1 + 2^{1-2x}$
0	$1 + 2^{1} = 3$
$\frac{1}{2}$	$1 + 2^{1 - \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}}} = 1 + 2^{1-1} = 2$