CÁLCULO 1A

16/10/25 - AULA 10

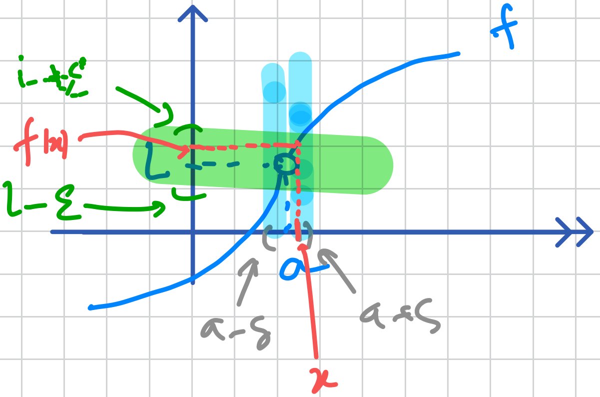
Na aula passada iniciamos o estudo de limites de funções de uma variável real.

A ideia do conceito de limite é de aproximação para um valor no qual f não está definida, perguntando o que acontece com a imagem f(x) quando x se aproxima de um valor no qual ela não está definida. Ou seja, vimos a definição:

Def.: Dizemos que $L \in \mathbb{R}$ é o limite de uma função f(x) quando x tende para a, e escrevemos $\lim_{x \to a} f(x) = L$, se e somente se,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que}, \forall x \in D(f) \text{ tal que}$$

$$0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$



$\forall x \in (a-\delta,\ a+\delta)\setminus\{a\}$, e

isso se escreve $\underbrace{0}_{x \neq a} < |x-a| < \delta$;

isto <u>GARANTE</u> que

$f(x) \in (L-\varepsilon,\ L+\varepsilon)$; ou seja,

$|f(x) - L| < \varepsilon$.

Vimos alguns exemplos de cálculo.

Vejamos mais um:

<u>Ex.:</u> Calcule o limite:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 6x + 4}{x^2 - 3x + 2} = \frac{0}{0}$$

(INDETERMINAÇÃO)

SIGNIFICA QUE APARECE O FATOR $x-2$ NO NUMERADOR E NO DENOMINADOR.

$$
\begin{array}{l|l}
\cancel{x^3} - 6x + 4 & x - 2 \\ \cline{2-2}
-\cancel{x^3} + 2x^2 & x^2 + 2x - 2 \\ \cline{1-1}
\quad \cancel{2x^2} - 6x + 4 & \\
\quad -\cancel{2x^2} + 4x & \\ \cline{1-1}
\qquad -2x + \cancel{4} & \\
\qquad +2x - 4 & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

$$\Rightarrow x^3 - 6x + 4 = (x-2)\cdot(x^2+2x-2)$$

$$
\begin{array}{l|l}
\cancel{x^2} - 3x + 2 & x - 2 \\ \cline{2-2}
+\; -\cancel{x^2} + 2x & x - 1 \\ \cline{1-1}
\qquad -x + \cancel{2} & \\
\qquad +x - 2 & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$$

Assim, obtemos:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-6x+4}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}\cdot(x^2+2x-2)}{\cancel{(x-2)}\cdot(x-1)} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x^2+2x-2}{x-1} = \frac{(2)^2+2\cdot(2)-2}{2-1}$$

$$= \frac{4+4-2}{1} = 6$$

Ex. 02 Calcule o limite:

$\frac{0}{0}$ (INDETERMINAÇÃO)

$$\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{x^2+3}}{x^2+3x+2} =$$

Como envolve um radical, precisamos racionalizar. O fator racionalizante, neste caso, será: $\sqrt{x+5}+\sqrt{x^2+3}$. Assim:

$$\lim_{x\to -1} \frac{(\sqrt{x+5}-\sqrt{x^2+3})}{x^2+3x+2} \cdot \frac{(\sqrt{x+5}+\sqrt{x^2+3})}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x^2+3}} =$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{\left(\sqrt{x+5}\right)^{2} - \left(\sqrt{x^2+3}\right)^{2}}{(x^2+3x+2)\cdot\left(\sqrt{x+5} + \sqrt{x^2+3}\right)} =$$

$$(a-b)\cdot(a+b) = a^2 - b^2$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{x+5-(x^2+3)}{(x^2+3x+2)\left(\sqrt{x+5} + \sqrt{x^2+3}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{-x^2+x+2}{(x^2+3x+2)\left(\sqrt{x+5} + \sqrt{x^2+3}\right)} =$$

$$\begin{array}{rrr|l}
\cancel{-x^2} & +x & +2 & x+1 \\ \cline{4-4}
\cancel{+x^2} & +x & & -x+2 \\ \cline{1-3}
 & \cancel{2x} & \cancel{+2} & \\
 & -2x & -2 & \\ \cline{2-3}
 & & 0 &
\end{array}$$

$x-(-1)$

$$\Rightarrow -x^2+x+2 = (x+1)\cdot(-x+2)$$

$$
\begin{array}{rrr|l}
\cancel{x^2} & +3x & +2 & x+1 \\ \cline{4-4}
-\cancel{x^2} & -x & & x+2 \\ \cline{1-3}
 & 2x & \cancel{+2} & \\
 & -\cancel{2x} & -2 & \\ \cline{2-3}
 & & 0 &
\end{array}
$$

$$\Rightarrow x^2+3x+2 = (x+1).(x+2)$$

Assim, obtemos:

$$= \lim_{x\to -1} \frac{\cancel{(x+1)}(-x+2)}{\cancel{(x+1)}.(x+2).\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x^2+3}\right)}$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{-x+2}{(x+2)\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x^2+3}\right)} =$$

$$= \frac{-(-1)+2}{(-1+2).\left(\sqrt{-1+5}+\sqrt{(-1)^2+3}\right)} =$$

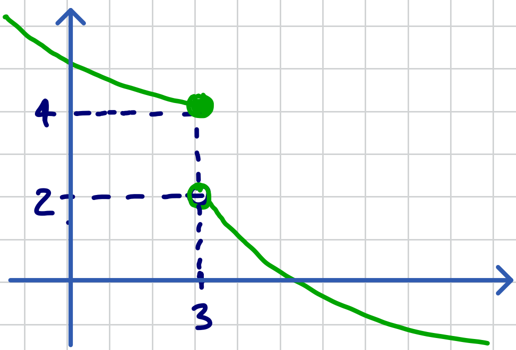
$$= \frac{1+2}{1.\left(\sqrt{4}+\sqrt{4}\right)} = \frac{3}{2+2} = \frac{3}{4}$$

LIMITES LATERAIS:

Definimos os limites $\lim_{x \to a^+} f(x)$ como a aproximação à direita de $x = a$ e $\lim_{x \to a^-} f(x)$ como a aproximação à esquerda de $x = a$.

Vejamos uma ilustração gráfica:

Ex:



Neste caso temos que:

- $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 2$
- $\lim_{x \to 3^-} f(x) = 4$

Porém, observamos que $\nexists \lim_{x \to 3} f(x)$, pois pela esquerda o limite seria 4 e pela direita o limite seria 2.

Ou seja, tem-se o seguinte resultado:

$$\boxed{\exists \lim_{x \to a} f(x) \iff \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)}$$

Em palavras: para existir o limite em um ponto, devem existir os limites laterais e eles devem ser iguais.

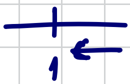
Ex.: Dada $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+1}, & \text{se } x > 1 \\ \dfrac{x}{2-x}, & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

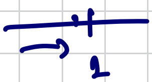
Perguntamos: $\exists \lim_{x \to 1} f(x)$?

Solução: Precisamos examinar os limites laterais. Assim:

- $\displaystyle \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$



- $\displaystyle \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x}{2-x} = \frac{1}{2-1} = \frac{1}{1} = 1.$



Então, $\displaystyle \lim_{x\to 1^+} f(x) = \frac{1}{2} \neq 1 = \lim_{x\to 1^-} f(x)$

Conclusão: $\displaystyle \nexists \lim_{x\to 1} f(x)$.

02) Verifique se $\exists \lim\limits_{x \to 2} f(x)$, sendo

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x+2}, & \text{se } x > 2 \\[2mm] \dfrac{1}{3x-4}, & \text{se } x < 2 \end{cases}.$$

<u>solução</u>:

- $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{1}{3x-4} = \dfrac{1}{3.(2)-4} = \dfrac{1}{2}$

2

- $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x}{x+2} = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{2}{2+2} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

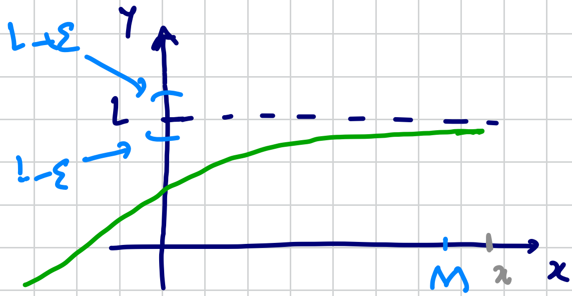
$$\Rightarrow \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = \frac{1}{2}.$$

Conclusão: $\exists \lim\limits_{x \to 2} f(x) = \dfrac{1}{2}$

LIMITES NO INFINITO:

Def.: Definimos os limites:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon>0,\ \exists M>0 \text{ tal que, } \forall x>M \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon.$$



Por exemplo, seja $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $x \neq 0$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = ?$$

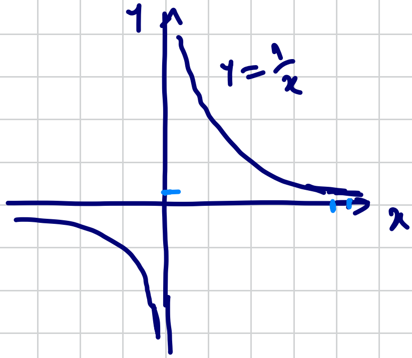
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

ESTAMOS DIVIDINDO 1 POR "ALGO" ABSURDAMENTE GRANDE

$$\frac{1}{10} = 0{,}1$$

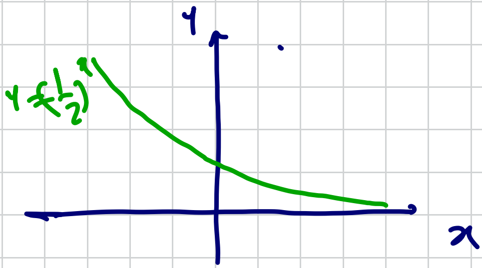
$$\frac{1}{100} = 0{,}01$$

$$\frac{1}{1000} = 0{,}001. \longrightarrow 0$$



02) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ (FUNÇÃO EXPONENCIAL DECRESCENTE)

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\underbrace{2^x}_{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

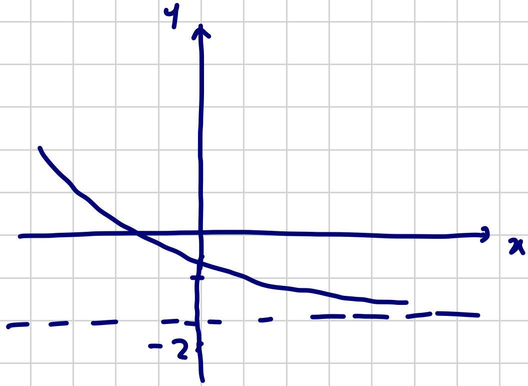


03) $f(x) = -2 + \left(\frac{3}{5}\right)^x$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = ?$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(-2 + \underbrace{\left(\frac{3}{5}\right)^x}_{\to 0}\right) = -2.$$

$0 < \frac{3}{5} < 1.$



Do mesmo modo, temos outros limites infinitos. (Veremos na próxima aula)