CÁLCULO 1A.

14/10/25 - AULA 09

No final da aula passada estudamos a função logarítmica. Vamos fazer mais um exemplo.

EX.1 $y = 1 + \log_2(x-1)$. Esboce o seu gráfico, indicando domínio e imagem.

SOLUÇÃO:

$$y = 1 + \log_2 \underbrace{(x-1)}_{>0} \hookrightarrow x - 1 > 0$$

$$x > 1.$$

$$y - 1 = \log_2(x-1)$$

$$\Leftrightarrow 2^{y-1} = x - 1$$

$$\Leftrightarrow x = 1 + 2^{y-1}$$

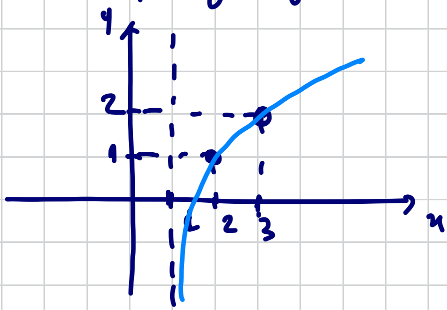
$D(f) = (1, +\infty)$.

$x = 1 + 2^{y-1}$	y
$1 + 2^0 = 2$	1
$1 + 2^1 = 3$	2

ASSÍNTOTA VERTICAL:

$x = 1$.

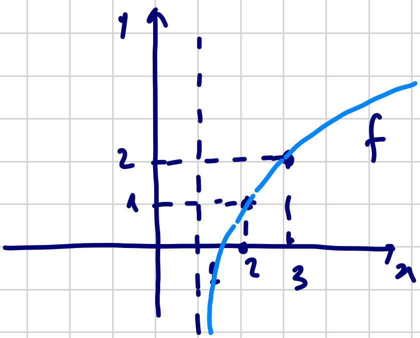
Esboço gráfico:



CAPÍTULO 2 : LIMITES DE FUNÇÃO:

A ideia intuitiva é a ideia de aproximação. Ou seja, temos por exemplo uma função $y = f(x)$, f não está definida em um ponto $x = a$; e queremos saber o quê acontece com a imagem de f quando x for próximo de a.

Observando o gráfico do exercício acima:



Olhando este gráfico de f perguntamos: quando x se aproximar de 1, para quanto se aproximará sua imagem f(x)? Pelo desenho, parece que, à medida em que x se aproxima de 1 por valores maiores que 1, tem-se que f(x) se aproxima de "menos infinito".

Um outro exemplo: $f: \mathbb{R}\setminus\{2\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}.$$

Esta função não está definida em $x=2$ pois neste ponto teríamos divisão por zero.

E se x for próximo de 2, quanto deve valer a respectiva imagem $f(x)$

Ou seja, examinando $x = 1,99$; $x = 1,999$; $x = 2,001$; quais são imagens?

x	$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = \underline{\underline{x+2}}$; $x \neq 2$
1,99	$1,99+2 = 3,99$
1,999	$1,999+2 = 3,999$
2,001	$2,001+2 = 4,001$
$\vdots$	$\vdots$

Neste caso, segue pelos cálculos acima, que, quando x estiver muito perto de $x=2$, então

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$$ ficará muito perto de 4.

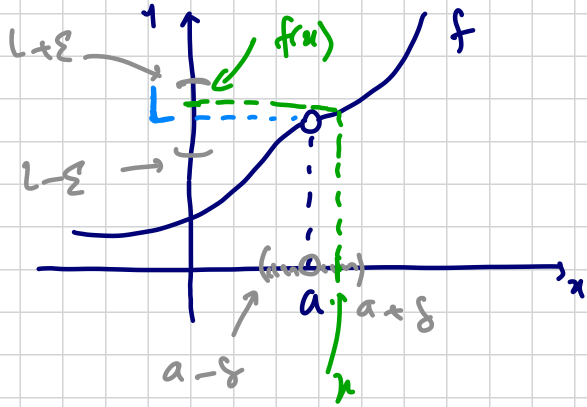
Ou seja, dizemos que o limite da $f(x)$ quando x se aproxima de 2 ou tende a 2, será 4. Simbolicamente, escreve-se:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4.$$

Mais precisamente, temos a seguinte definição.

Def.: Seja $f: A \to \mathbb{R}$ uma função, tal que f não está definida em um ponto a. Dizemos que $L \in \mathbb{R}$ é o limite da $f(x)$ quando x tende para a, e escrevemos $\lim_{x \to a} f(x) = L$, se e somente se,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que, } \forall x \in A: \ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$



TOME $\varepsilon > 0$. CONSTRUA O INTERVALO $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$. Então, deve existir $\delta > 0$ tal que constrói-se o intervalo $(a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$

tal que, $\forall x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$, é GARANTIDO que $f(x)$ fica no intervalo $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.

Note que $|f(x) - L| < \varepsilon \iff -\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon$

$\overset{+L}{\iff} L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$

$\Updownarrow$

$f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$

Embora esta seja a definição formal do limite, não abordaremos em nosso curso este contexto.

Na prática, o cálculo de limites resume-se a efetuar uma simplificação para remover o símbolo $\frac{0}{0}$, que é chamado de um SÍMBOLO DE INDETERMINAÇÃO.

Voltando a exemplo anterior: $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$

Note que $f(2)$ não existe. Além disso;

$$f(2) = \frac{(2)^2-4}{2-2} = \frac{0}{0} \quad (\text{INDETERMINAÇÃO})$$

Uma indeterminação é removida mediante uma simplificação. Vejamos exemplos:

Calcule os limites:

01) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = \lim\limits_{x\to 2} x+2 =$

$$= 2+2 = 4.$$

$\frac{0}{0}$

02) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$

$\frac{0}{0} \to$ INDICA QUE TEM O FATOR $x-1$ NO NUM. E NO DENOM.

Note que:

$$x^2-1 = (x+1)(x-1)$$

$$
\begin{array}{rl|l}
\cancel{x^2} - 3x + 2 & & x - 1 \\
\hline
-\cancel{x^2} + x & & x - 2 \\
\hline
-\cancel{2x} + \cancel{2} & & \\
+\cancel{2x} - \cancel{2} & & \\
\hline
0 & &
\end{array}
$$

ESTA DIVISÃO DEVERÁ SER EXATA.

$$
\begin{array}{r|l}
\cancel{4}5 & 2 \\
\hline
-\cancel{4} & 22 \\
\hline
\cancel{5} & \\
-\cancel{4} & \\
\hline
1 &
\end{array}
\quad x
$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 3x + 2 = (x-2) \cdot (x-1)$$

Com isso, teremos:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-2) \cdot \cancel{(x-1)}}{(x+1) \cdot \cancel{(x-1)}} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x-2}{x+1} = \frac{1-2}{1+1} = -\frac{1}{2}$$

03) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^4 - 16}{x^3 - 8} = \dfrac{0}{0}$. Logo, aparece o fator $x-2$ no numerador e no denominador

$$
\begin{array}{l|l}
\cancel{x^4} - 16 & x - 2 \\ \hline
-\cancel{x^4} + 2x^3 & x^3 + 2x^2 + 4x + 8 \\ \hline
\cancel{2x^3} - 16 & \\
-\cancel{2x^3} + 4x^2 & \\ \hline
\cancel{4x^2} - 16 & \\
-\cancel{4x^2} + 8x & \\ \hline
8x - \cancel{16} & \\
-8x + \cancel{16} & \\ \hline
0 &
\end{array}
$$

$$\Rightarrow x^4 - 16 = (x-2) \cdot (x^3 + 2x^2 + 4x + 8)$$

$$
\begin{array}{l|l}
\cancel{x^3} - 8 & x - 2 \\ \hline
-\cancel{x^3} + 2x^2 & x^2 + 2x + 4 \\ \hline
\cancel{2x^2} - 8 & \\
-\cancel{2x^2} + 4x & \\ \hline
4x - \cancel{8} & \\
-4x + \cancel{8} & \\ \hline
0 &
\end{array}
$$

$$\Rightarrow x^3 - 8 = (x-2) \cdot (x^2 + 2x + 4)$$

Assim, obtemos:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^4-16}{x^3-8} = \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}\cdot(x^3+2x^2+4x+8)}{\cancel{(x-2)}\cdot(x^2+2x+4)} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x^3+2x^2+4x+8}{x^2+2x+4} = \frac{(2)^3+2\cdot(2)^2+4(2)+8}{(2)^2+2\cdot(2)+4} =$$

$$= \frac{8+8+8+8}{4+4+4} = \frac{\cancel{4}\cdot 8}{3\cdot\cancel{4}} = \frac{8}{3}.$$

$$\frac{\sqrt{4}-2}{1-5+4} = \frac{0}{0} \text{ (INDETERMINAÇÃO)}$$

$\downarrow$

logo, o fator $x-1$ aparece no numerador e no denominador

04) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-5x+4}$

Como este problema envolve um radical, inicialmente precisamos efetuar uma racionalização. Lembre que o fator racionalizante de $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ será $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, pois: $(\sqrt{a}-\sqrt{b})\cdot(\sqrt{a}+\sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2 =$

$= a-b.$

Voltando ao problema, temos:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x^2 - 5x + 4} \times \frac{\sqrt{x+3} + 2}{\sqrt{x+3} + 2} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x+3})^2 - (2)^2}{(x^2 - 5x + 4)\cdot(\sqrt{x+3} + 2)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x + 3 - 4}{(x^2 - 5x + 4)(\sqrt{x+3} + 2)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{(x^2 - 5x + 4)(\sqrt{x+3} + 2)} =$$

$$\begin{array}{rrr|l}
\cancel{x^2} & -5x & +4 & x - 1 \\ \cline{4-4}
-\cancel{x^2} & +x & & x - 4 \\ \cline{1-3}
 & -4x & \cancel{+4} & \\
 & +4x & -4 & \\ \cline{2-3}
 & & 0 &
\end{array}$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4).$$

Logo, obtemos:

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(x-4) \cdot \left(\sqrt{x+3}+2\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-4)\left(\sqrt{x+3}+2\right)} = \frac{1}{(1-4)\left(\sqrt{1+3}+2\right)} =$$

$$= \frac{1}{-3 \cdot 4} = -\frac{1}{12}$$

$\frac{0}{0}$

05) $$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{\sqrt{x+7}-3} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{\sqrt{x+7}-3} \cdot \frac{\sqrt{x+7}+3}{\sqrt{x+7}+3} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x+2)(x-2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{\left(\cancel{\sqrt{\,}}x+7\right)^{\cancel{2}} - 3^2} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x+2)(x-2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{x+7-9} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x+2)\cancel{(x-2)}(\sqrt{x+7}+3)}{\cancel{x-2}} =$$

$$= \lim_{x \to 2} (x+2)(\sqrt{x+7}+3) = (2+2)(\sqrt{9}+3)$$

$$= 4 \cdot 6 = 24 \, .$$