

CA' com 1A

30/10/25 - AULA 12

Na aula passada estudamos limites no infinito.
Vejamos mais um exemplo:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - x^3 + 2x^4}{5x^3 - 2x + 1} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4}{5x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{5} \\ &= \frac{2 \cdot (-\infty)}{5} = -\infty\end{aligned}$$

Um outro caso que pode ocorrer é envolvendo
raízes. Exemplo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+2} - \sqrt{x} = ?$$

$$\sqrt{\infty} - \sqrt{\infty} = \infty - \infty$$

NOT.

Nestes casos, a saída é procurar racionalizar.

Anim:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+2} - \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x}) \cdot \frac{(\sqrt{x+2} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x+2} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x+2})^2 - (\sqrt{x})^2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2-x}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{+\infty} + \sqrt{+\infty}} = \frac{2}{+\infty + \infty} = \frac{2}{+\infty} = 0$$



FUNÇÕES CONTÍNUAS:

Def: Dizemos que uma função $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em um ponto $a \in A$ se, e somente se,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Esta igualdade nos diz que:

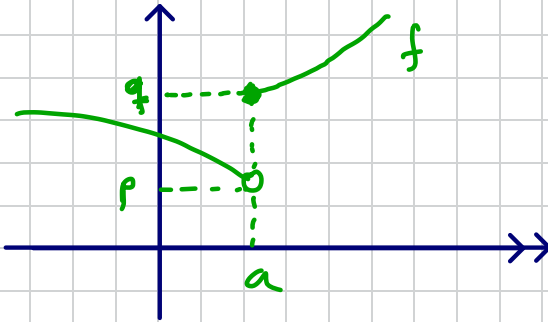
$$(i) \exists f(a) ;$$

$$(ii) \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) ;$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

→ estas existências
normalmente é
comprovadas calculando
os limites laterais

Ex.:



Perguntamos: f é contínua no ponto $x=a$?

Note que $\exists f(a) = q$; mas

$\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, pois :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = p$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = q$$

mas $p \neq q$.

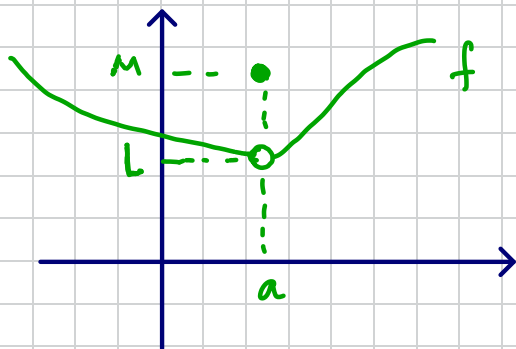
Logo, não pode ser

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) .$$

pois f .

Portanto, f não é contínua no ponto a .
Quando uma função não é contínua em um ponto, dizemos que é DESCONTÍNUA nesse ponto.

vejamos outro exemplo gráfico:



Neste caso, temos que

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L .$$

Logo, $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$;

mas $f(a) = M \neq L$. Assim,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq M = f(a) ,$$

ou seja, f não é contínua no ponto $x=a$.

Sejamos um exemplo algébrico:

ex: Verifique se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x + 2} , & \text{se } x < -2 \\ x , & \text{se } x \geq -2 \end{cases}$$

é contínua no ponto $x = -2$.

Solução: Note que:

$$(i) \exists f(-2) = -2. \quad (f(x) = x)$$

$$(ii) \exists \lim_{x \rightarrow -2} f(x) ?$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \frac{0}{0} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{(x+2) \cdot (x-2)}{x+2} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -2^-} (x-2) = -2-2 = -4
 \end{aligned}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} x = -2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -4 \neq -2 = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$$

Logo, $\nexists \lim_{x \rightarrow -2} f(x)$. Assim, não tem

como estabelecer a igualdade $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2)$

conclusão: f não é contínua no ponto $x = -2$.

Def.: Dizemos que uma função $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua se for contínua em todos os pontos do seu domínio A .

PROP.: Se f, g são funções contínuas, então $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ e f/g são contínuas.

No caso de f/g , esta é contínua onde $g(x) \neq 0$.

FUNÇÕES DERIVÁVEIS:

Def.: Dizemos que uma função $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável em um ponto $x_0 \in (a,b)$ se, e somente se, existir o limite

$$f'(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Neste caso, chamamos $f'(x_0)$ por derivada de f no ponto x_0 .

Escrevendo $x - x_0 = h \in \mathbb{R}$, então,

temos que $h \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$,

e assim, podemos escrever a derivada em x_0 por:

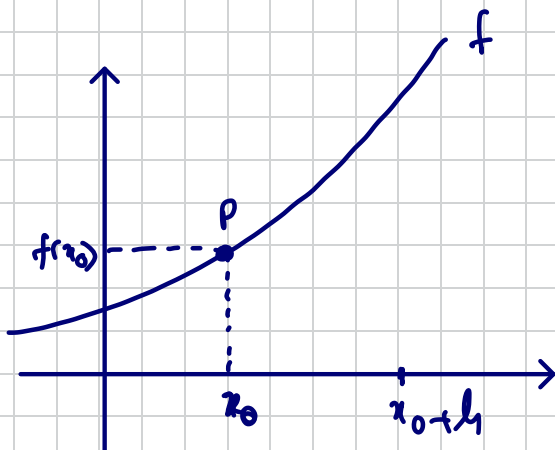
$$\underbrace{f'(x_0)}_{\text{verde}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$x - x_0 = h$
 $\Rightarrow x = x_0 + h$

SIGNIFICADO GEOMÉTRICO DA DERIVADA DE UMA FUNÇÃO

EM UM PONTO:

Seja $y = f(x)$ uma função derivável em um ponto $x_0 \in (a, b)$.



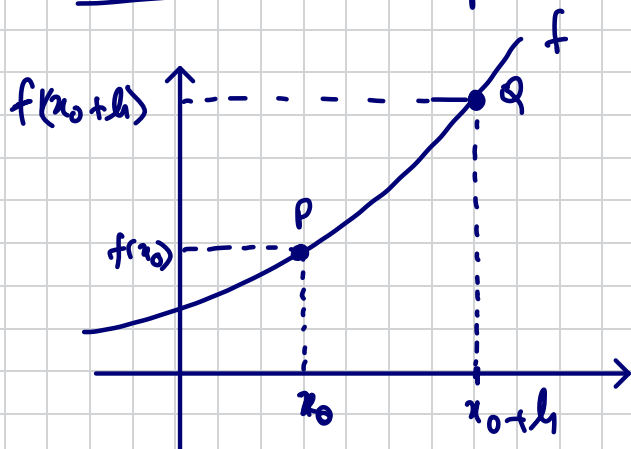
Isso determina
um ponto fixo

$$P(x_0, f(x_0))$$

Seja $h \in \mathbb{R}$
($h > 0$) e

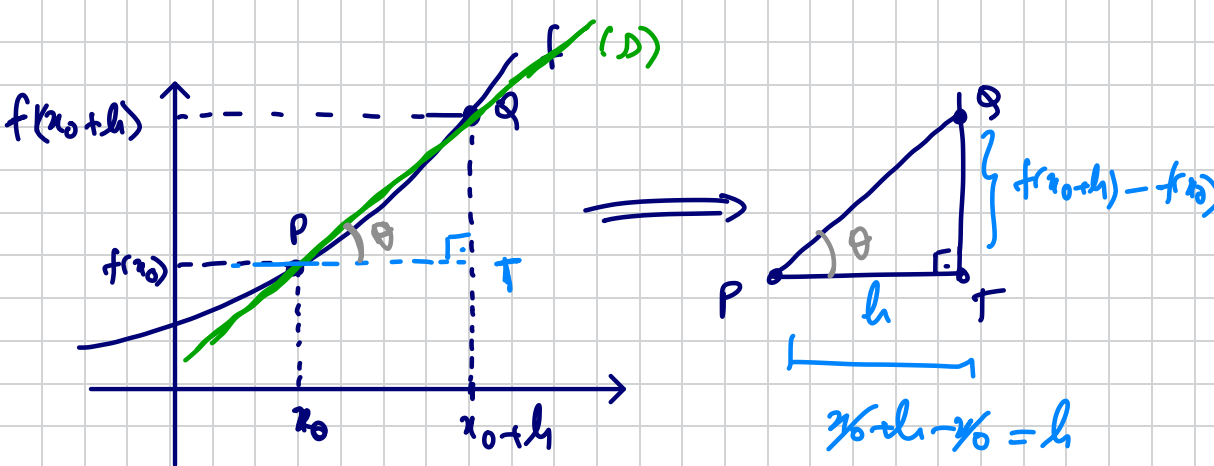
tome o ponto
 $x_0 + h$.

Este ponto determina o ponto $Q(x_0 + h, f(x_0 + h))$,
um ponto móvel (pois h irá diminuir)



Seja (s) a reta
secante ao gráfico
de f nos pontos
 P e Q .

Designar o ponto T como se figure
abreixo e seja θ o ângulo formado pela
reta secante que passa por P e por Q .



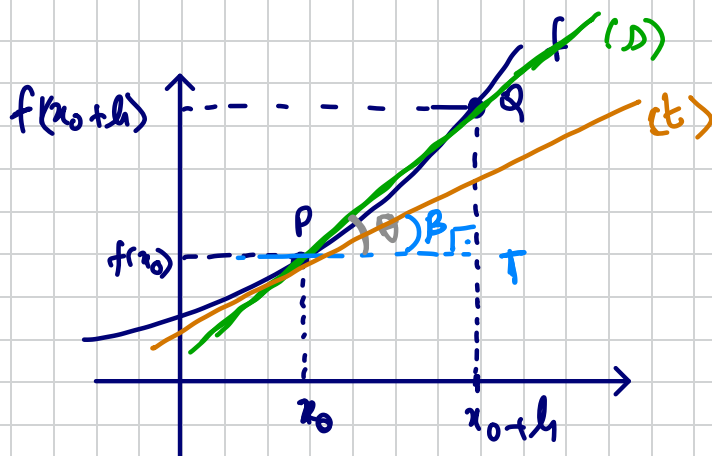
Analisando a Trigonometria no triângulo retângulo, temos que

$$\tan \theta = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

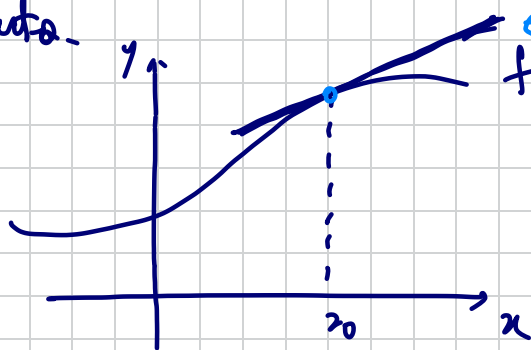
Fazendo $h \rightarrow 0$, o ponto Q vai se aproximar do ponto P ; e com isso a reta secante vai se aproximar a uma reta tangente ao gráfico de f no ponto P .

Seja t_f essa reta tangente. A inclinação dessa reta será $m = \tan \theta$, e será dada por:

$$\tan \beta = m = \lim_{h \rightarrow 0} \tan \theta = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$



CONCLUSÃO: A derivada de uma função em um ponto corresponde à inclinação (coeficiente angular) de reta tangente ao gráfico de f naquele ponto.

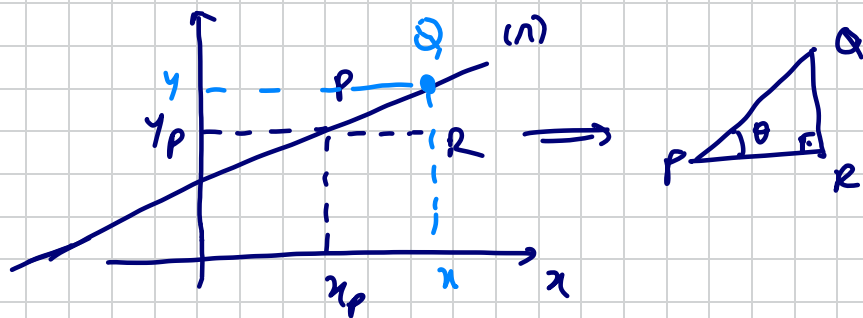


← ESSA
RETA TANGENTE
AO GRÁFICO DE
 f EM x_0
TEM
INCLINAÇÃO
 $f'(x_0)$.

Da Geometria Analítica a equação de uma reta que passa por um ponto $P(x_p, y_p)$ é dada por:

$$y - y_p = m \cdot (x - x_p) ; \text{ onde}$$

m é a inclinação dessa reta. De fato:



Seja $Q(x, y)$ um outro ponto qualquer sobre a reta (n) . Então, da Trigonometria:

$$m := \tan \theta = \frac{\overline{QR}}{\overline{PR}} = \frac{y - y_p}{x - x_p}$$

$\uparrow$
inclinação
de reta

$$m = \frac{y - y_p}{x - x_p} \Rightarrow \boxed{y - y_p = m \cdot (x - x_p)}$$

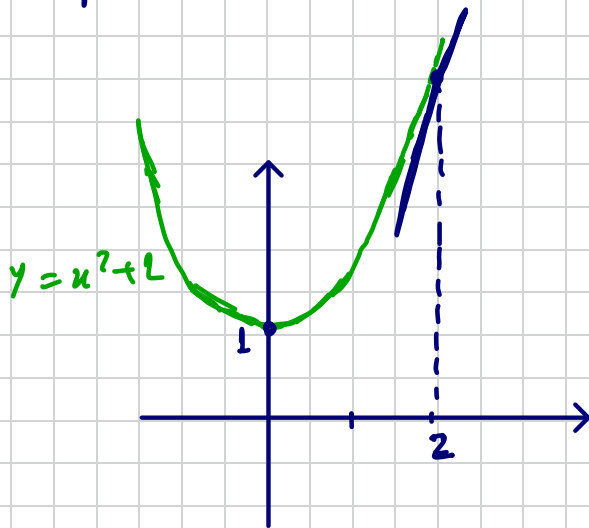
Na nossa caso, $m = f'(x_p)$.

Vejaemos um exemplo:

Ex.: Dada $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$.

Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto onde $x = 2$.

Solução:



$$x = 2 ; y = (2)^2 + 1 = 5$$

$\parallel$
 $f(2)$ $P(2, 5)$

A equação da reta tangente neste ponto será dada por:

$$y - y_p = m \cdot (x - x_p)$$

$$y - 5 = m \cdot (x - 2) \quad ; \quad \text{onde}$$

$$m = f'(2).$$

$$\underbrace{f'(2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - \overbrace{f(2)}^{=5}}{x - 2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 1 - 5}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2) \cdot \cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 2+2 = \underline{4}.$$

$$\Rightarrow \boxed{m = f'(2) = 4}$$

Assim, a eq. da reta tangente ao gráfico de f no ponto onde $x=2$ será dada por

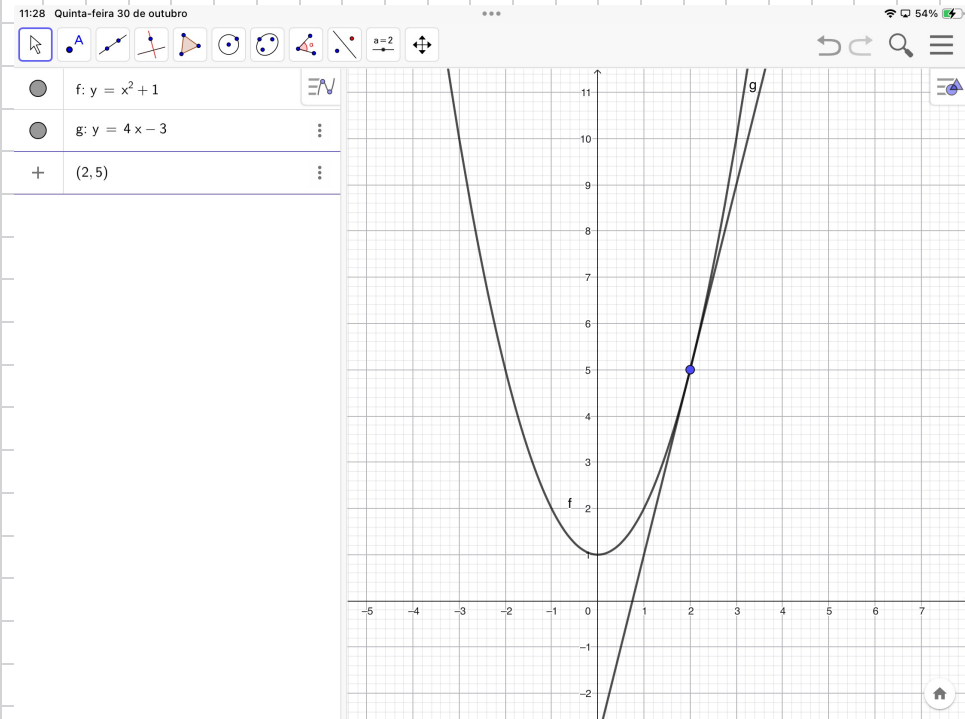
$$y - 5 = f'(2) \cdot (x - 2)$$

$$y - 5 = 4 \cdot (\overbrace{x - 2})$$

$$y - 5 = 4x - 8$$

$$y = 4x - 8 + 5$$

$$y = 4x - 3$$



02) Dada $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$;

obtenha a derivada no ponto $x = 4$.

solução: $f'(4) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4}$,

$$\text{onde } f(4) = (4)^2 + \sqrt{4} = 16 + 2 = 18$$

$$\Rightarrow f'(4) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + \sqrt{x} - 18}{x - 4} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + \sqrt{x} - 16 - 2}{x - 4} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{x^2 - 16}{x - 4} + \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} + \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x+4)(x-4)}{x-4} + \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} \cdot \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} (x+4) + \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x})^2 - (2)^2}{(x-4) \cdot (\sqrt{x}+2)}$$

$$= 4+4 + \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{(x-4) \cdot (\sqrt{x}+2)}$$

$$= 8 + \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = 8 + \frac{1}{\sqrt{4}+2}$$

$$= \frac{8}{1} + \frac{1}{4} = \frac{32+1}{4} = \frac{33}{4}$$

Def.: Dizemos que $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável se for derivável em todos os pontos do seu domínio. Neste caso, tem-se a função derivada:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$