

Vamos, antes, fazer mais um exercício usando indução.

Soluzioni:

$$2^4 = 16 > 2^4 = 16 < 24 = 4!$$

(ii) Suponha a desigualdade seja verdadeira para um certo $n \geq k$, ou seja, que vale

$$\underline{2^k < x!}$$

hipótese da indução)

Precisamos mostrar que vale para $n = k+1$,
ou seja, mostrar que

$$2^{k+1} < (k+1)! \quad (\text{TESE DA INDUÇÃO})$$

De fato, note que:

$$\underbrace{2^{k+1}} = 2^k \cdot 2 < k! \cdot 2 < k! \cdot (k+1) = \underbrace{(k+1)!}$$

↑
pela hipótese
de indução

$$2 < k, \text{ pois } k \geq 4$$

$$\Rightarrow 2 < k < k+1$$

$$\Rightarrow 2^{k+1} < (k+1)! ; \text{ logo, vale (ii)}$$

Assim, pelos itens (i) e (ii) o resultado segue por indução, ou seja, mostramos que

$$2^n < n! , \quad \forall n \geq 3.$$

□

Voltando ao estudo de determinantes:

PROP.: Dada uma matriz quadrada A , de ordem n , então,
 $\det A = \det A^t$.

DEMONSTR.: Faremos a prova por indução sobre a ordem da matriz.

(i) BASE DA INDUÇÃO: Seja $A_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Então, $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$

$$= \underline{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}.$$

Seja $A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$. Então:

$$\underline{\det(A^t)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \underline{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}$$

Ou seja, $\det A = \det A^t$ ($n=2$)
Logo, vale a base da indução.

(ii) Suponha o resultado válido para $n=k$,
ou seja, dada uma matriz qualquer $B_{k \times k}$,
tem-se que $\det B = \det B^t$.

Precisamos mostrar que este resultado vale
para matrizes de tamanho $(k+1) \times (k+1)$.

Assim, seja,

$$A_{(k+1) \times (k+1)}$$

Vamos desenvolver o $\det A_{k+1}$ sobre a
primeira linha dessa matriz. Assim:

$$\det A_{k+1} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + \dots + a_{1(k+1)} \cdot A_{1(k+1)}$$

$$\text{onde } A_{1j} = (-1)^{1+j} \det(M_{1j})$$

 são matrizes
 $k \times k$.

Logo, $\det(M_{1,j}) = \det(M_{1,j}^t)$, e denso,

segue que

$$\det A_{k+1} = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \det(M_{11}^t) + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot \det(M_{12}^t) \\ + \dots + a_{1,k+1} \cdot (-1)^{1+(k+1)} \cdot \det M_{1,k+1}^t$$

$$= \det A_{k+1}^t, \text{ desenvolvido sobre a}$$

1ª coluna de A^t

On seja, mostramos que

$$\det A = \det A^t; \text{ provando (ii)}$$

Por (i) e (ii) o resultado segue por indução.

□

PROPOSIÇÃO: Se A for uma matriz triangular (superior ou inferior, tanto faz), então o determinante de A será simplesmente o produto dos elementos da diagonal principal. Ou seja, sendo A_n triangular, então

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot a_{44} \cdots a_{nn}.$$

DEMONSTR.: Como a transposta de uma matriz triangular inferior é uma matriz triangular superior, pela proposição anterior, é suficiente mostrar para apenas um tipo.

Desse modo, seja A_n uma matriz triangular inferior:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}.$$

Faremos a prova por indução sobre a ordem

n da matriz.

(i) $n=2$ (BASE DA INDUÇÃO):

Neste caso, tem-se:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \quad \text{Assim:}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - 0 = a_{11} \cdot a_{22}.$$

Logo, vale a base da indução.

(ii) Suponha o resultado válido para um certo $n=k$, ou seja, que toda matriz triangular inferior $B_{k \times k}$, tem-se que

$$\det B = b_{11} \cdot b_{22} \cdots b_{kk}.$$

Temos que provar que vale para $n=k+1$, ou seja, que o resultado vale para qualquer matriz de tamanho $(k+1) \times (k+1)$.

Logo

$$A_{k+1} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k+1,1} & a_{k+1,2} & \dots & \dots & \dots & a_{k+1,k+1} \end{pmatrix}$$

Desenvolvendo o $\det A$ sobre a 1ª linha (pois teremos k zeros), obtemos:

$$\det A_{k+1} = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \det(M_{11}) + \underline{0} \cdot (-1)^{1+2} \cdot \det(M_{12}) + \dots + \underline{0} \cdot (-1)^{1+(k+1)} \cdot \det(M_{1,k+1})$$

$$= +a_{11} \cdot \det(M_{11}),$$

onde M_{11} é uma matriz menor de tamanho $k \times k$.

$$M_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k+1,2} & a_{k+1,3} & \dots & \dots & \dots & a_{k+1,k+1} \end{pmatrix},$$

e então, pela hipótese de indução, vale que

$$\det M_{11} = a_{22} \cdot a_{33} \cdot a_{44} \cdots \cdot a_{k+1, k+1}.$$

Assim,

$$\det A_{k+1} = a_{11} \cdot \det M_{11} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdots a_{k+1, k+1}.$$

Logo, vale (ii)

Dito, pelos itens (i) e (ii) o resultado segue por indução.

□