

CAPÍTULO II - ESPAÇOS VETORIAIS

Def. Chamamos um ESPAÇO VETORIAL um conjunto não vazio V equipado com duas operações:

$$+ : V \times V \rightarrow V$$

$$(u, v) \mapsto u + v$$

$$\bullet \quad \mathbb{R} \times V \rightarrow V$$

$$(\alpha, u) \mapsto \alpha \cdot u,$$

tal que cumpre as seguintes propriedades:

$\forall u, v, w \in V$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, temos:

$$A_1: u + (v + w) = (u + v) + w \quad (\text{ASSOCIATIVIDADE})$$

$$A_2: u + v = v + u \quad (\text{COMUTATIVIDADE})$$

$$A_3: \exists 0 \in V, \text{ tal que } 0 + u = u, \forall u \in V$$

($0 \in V$ é o elemento neutro aditivo)

$$A_4: \forall u \in V, \exists w \in V, \text{ tal que } u + w = 0.$$

(w é o simétrico aditivo de u)

$$M_1: \alpha \cdot (\mu + \nu) = \alpha \cdot \mu + \alpha \cdot \nu \quad (\text{DISTRIBUTIVIDADE})$$

$$M_2: (\alpha + \beta) \mu = \alpha \mu + \beta \mu \quad (\text{DISTRIBUTIVIDADE})$$

$$M_3: \alpha(\beta \cdot \mu) = (\alpha \cdot \beta) \mu \quad (\text{ASSOCIATIVIDADE})$$

$$M_4: 1 \cdot \mu = \mu \quad (1 \in \mathbb{R} \text{ É O NEUTRO MULTIPLICATIVO})$$

Os elementos de um espaço vetorial são chamados de vetores.

O primeiro fato que devemos observar é que o neutro aditivo em V é único.

De fato, se 0 e θ forem neutros aditivos em V . Então:

$$0 = 0 + \theta = \theta$$

$$\Rightarrow 0 = \theta$$

pois θ é neutro aditivo.

pois 0 é neutro aditivo.

Da propriedade A_4 da definição acima, temos que todo elemento $u \in V$ é simétrizável. Mostremos que o simétrico aditivo de cada elemento $u \in V$ é único.

De fato; sejam $w_1, w_2 \in V$ simétricos aditivos de um elemento qualquer $u \in V$.

Assim:

$$u + w_1 = 0 \quad \text{e} \quad \underline{u + w_2 = 0}.$$

Do mesmo modo, $\underline{w_1 + u = 0}$ e $w_2 + u = 0$, devido à comutatividade da adição (por A_2).

Assim:

$$\underline{w_1} = w_1 + 0 = w_1 + \underline{u + w_2} = \underbrace{(w_1 + u)}_{\substack{\uparrow \\ \text{ASSOCIATIV.}}} + w_2 =$$

$$= \underline{0} + w_2 = \underline{w_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{w_1 = w_2}$$

Ou seja, o simétrico aditivo de $u \in V$ é único; e isso $\forall u \in V$.

Denotaremos o simétrico aditivo de $u \in V$ por $-u$. Assim:

$$u + (-u) = 0.$$

NOTAÇÃO: Um espaço vetorial V equipado com uma adição de vetores $+$ e um produto de um escalar por um vetor $\cdot$, geralmente, é denotado por $(V, +, \cdot)$. No entanto, toda vez em que a adição e o produto estiverem subentendidos (i.e., bem "conhecidos"), então podemos denotar este espaço vetorial simplesmente por V .

Isso que segue, apresentamos alguns exemplos de espaços vetoriais.

01) $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$, onde $+$ é a adição usual:

$$+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$((x, y), (u, v)) \mapsto (x+u, y+v)$$

e o produto por escalares:

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(\alpha, (x, y)) \mapsto \alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y).$$

Não é difícil mostrar que $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ é um espaço vetorial, verificando os 8 axiomas de espaço vetorial. Por exemplo; vejamos

$u = (x, y)$; $v = (a, b)$ e $w = (m, n)$ vetores do $\mathbb{R}^2$. Assim:

$$A_1 : \underline{u + (v+w)} = (x, y) + ((a, b) + (m, n)) =$$

$$= (x, y) + (a+m, b+m) = (\underbrace{x+(a+m)}_{\in \mathbb{R}}, \underbrace{y+(b+m)}_{\in \mathbb{R}})$$

$$= ((x+a)+m, (y+b)+m) = (x+a, y+b) + (m, m)$$

↑
pois vale a
associatividade
em $\mathbb{R}$.

$$= (\underbrace{(x, y)}_u + \underbrace{(a, b)}_v) + \underbrace{(m, m)}_w = \underbrace{(u+v)}_w,$$

o que prova a associatividade A_1 .

① mesmo deve ser feito para mostrar os demais 7 axiomas da def. de espaço vetorial.

At sobre, o neutro aditivo de $\mathbb{R}^2$ e' o vetor nulo: $0 = (0, 0)$.

② neutro multiplicativo e' $1 \in \mathbb{R}$.

0 simetria aditiva de $u = (a, b) \in \mathbb{R}^2$
seja $-u = (-a, -b) \in \mathbb{R}^2$, pois:

$$\begin{aligned} u + (-u) &= (a, b) + (-a, -b) = \\ &= (a-a, b-b) = (0, 0) = 0; \end{aligned}$$

o que prova A_4 .

02) $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ onde $+$ é a adição usual
de $\mathbb{R}^3$:

$$(a, b, c) + (m, n, p) = (a+m, b+n, c+p),$$

e o produto:

$$\alpha \cdot (m, n, p) = (\alpha m, \alpha n, \alpha p)$$

Não é difícil mostrar que $\mathbb{R}^3$ com as
operações acima definidas é um espaço
vetorial.

Mais geralmente, $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ como acima, tem um espaço vetorial.

03) $(M(m, n), +, \cdot)$ o conjunto das matrizes $M_{m \times n}$ equipadas com a adição usual de matrizes:

$$A + B = C, \text{ onde}$$

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad ;$$

e o produto $\cdot$ é o produto usual de um escalar por uma matriz:

$$\alpha \cdot A = B; \text{ onde}$$

$$b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$$

Afirmamos que $(M(m, n), +, \cdot)$ é

um espaço vetorial por os 8 axiomas da definição serão cumpridos. Por exemplo, os 4 axiomas aditivos foram vistos na aula 02. Restariam mostrar os quatro axiomas multiplicativos. Por exemplo; dados

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $A \in M(m, m)$, então vale que

$$(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A.$$

04) Seja P_n o conjunto de todos os polinômios de grau menor ou igual a n , ou seja:

$$P_n = \{ a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n : \}$$

$$a_j \in \mathbb{R}, \quad \forall j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

Equipando o conj. P_n com a adição usual de polinômios:

$$(p+q)(x) := p(x) + q(x),$$

e o produto de um escalar por um polinômio:

$$(\alpha \cdot p)(x) = \alpha \cdot p(x);$$

tornarei $(P_n, +, \cdot)$ um espaço vetorial, chamada de espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a n .

05) seja $V = C[a, b]$, onde

$$C[a, b] = \{ f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } f \text{ é contínua em } [a, b] \}$$

equipado com a adição:

$$+ : C[a, b] \times C[a, b] \rightarrow C[a, b]$$

$$(f, g) \mapsto f + g;$$

ou seja:

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x);$$

e o produto definida por:

$$\cdot : \mathbb{R} \times C[a, b] \rightarrow C[a, b]$$

$$(\alpha, f) \mapsto \alpha \cdot f ;$$

ou seja

$$(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$$

Afirmamos que $(C[a, b], +, \cdot)$ é um espaço vetorial, chamado de espaço vetorial das funções contínuas em $[a, b]$.

Neste caso, os vetores são funções contínuas.

Lembre do cálculo 1 que, soma de funções contínuas resulta numa função contínua, e o produto de funções contínuas é uma função contínua. No caso, um escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ pode ser pensado como uma função

constante, que é contínua. Além disso, o neutro aditivo será a função identicamente nula; $f(x) = 0, \forall x \in [a, b]$; que é uma função contínua.]

SUBESPAÇOS VETORIAIS:

Def. Seja V um espaço vetorial e $W \subset V$ um subconjunto não vazio de V . Dizemos que W é um SUBESPAÇO VETORIAL de V se, e somente se; $\forall u, v \in W$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, tivermos:

$$(i) \quad u + v \in W$$

$$(ii) \quad \alpha \cdot u \in W$$

} ou seja a soma
e o produto
ficam FECHADAS
em W .

Um subespaço vetorial, na verdade, é um espaço vetorial "menor" dentro de um espaço vetorial dado. Isto porque, sendo

Se W é um espaço vetorial e $W \subset V$ subespaço, todos os 8 axiomas da definição de espaço vetorial irão valer para os elementos de W (pois também são elementos de V).

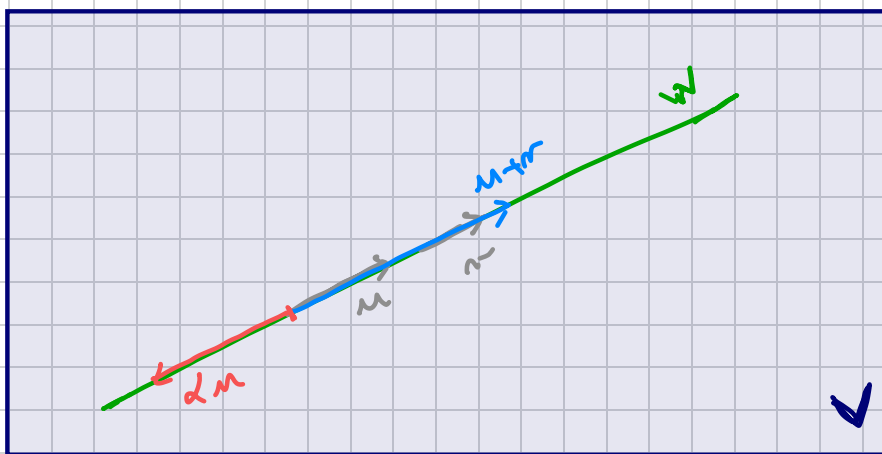


ILUSTRAÇÃO DE $W \subset V$; W - SUBESPAÇO DE V .

Note se $W \subset V$ é um subespaço vetorial de V , então, obrigatoriamente, $\vec{0} \in V$ é elemento de W , pois; devido à propriedade (iii) da def. de subespaço vetorial, temos que; tomando $0 \in \mathbb{R}$, então, $\forall \vec{v} \in V$,

segue que

$$\vec{0} = 0 \cdot \vec{v} \in W$$

Vejamos exemplos e contra-exemplos:

ex: $V = M(n)$ o espaço vetorial das matrizes quadradas $n \times n$. (espaço vetorial). Seja

$$W = \{ A \in M(n) : A \text{ é uma matriz triangular superior} \}.$$

Afirmamos que W é um sub-espaço vetorial de V . De fato, dados:

$A, B \in W$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se que:

$$A = (a_{ij})_{n \times n} \text{ tal que } a_{ij} = 0 \text{ se } i > j$$

$$B = (b_{ij})_{n \times n} \text{ tal que } b_{ij} = 0, \text{ se } i > j$$

Então, tem-se que

(i) $A+B$ será tal que

$$a_{ij} + b_{ij} = 0, \text{ se } i > j ;$$

ou seja $A+B \in W$;

(ii) $\alpha \cdot A$ será tal que

$$\alpha \cdot a_{ij} = 0, \text{ se } i > j ,$$

$$i \leq j ; \quad \alpha \cdot A \in W.$$

Portanto, por (i) e (ii) segue que

$W \subset V$ é um subespaço vetorial de W .

