

AVISO: SEMANA QUE VEM NÃO TEREMOS AULA (SEMANA DO SIIEPE). MAS, PELO E-AULA VAMOS TER UM ATENDIMENTO PELO WEBCONF, NA QUINTA, A PARTIR DAS 9h - ISSO MESMO, VAMOS CRIAR A TURMA ALI - .

Na aula anterior, vimos um importante teorema que mostrou o que ocorre com o determinante de uma matriz quando age uma op. elementar sobre linhas. Vimos que:

$$(i) \quad A \xrightarrow{l_i \leftrightarrow l_j} E \cdot A$$
$$\downarrow$$
$$\det A \mapsto \det(EA) = -\det A$$

$$(ii) \quad A \xrightarrow{l_i \leftarrow k l_i} E \cdot A$$
$$\downarrow$$
$$\det A \mapsto \det(EA) = k \cdot \det A.$$

$$(iii) \quad A \xrightarrow{l_i \leftrightarrow l_i + kl_j} EA$$

$$\downarrow$$

$$\det A \mapsto \det(EA) = \det A.$$

Vimos também que em qualquer dos casos acima, sendo E uma matriz elementar, segue que

$$\det(E \cdot A) = \det E \cdot \det A.$$

Isto pode ser generalizado para matrizes A e B quaisquer, desde que quadradas e de mesma ordem. Ou seja, vale o seguinte resultado:

TEOREMA: Sejam A e B matrizes quadradas de mesma ordem, então

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

DEMONSTRAÇÃO: Suponha que uma das matrizes seja invertível; digamos A .

Logo, a forma escalonada reduzida por

linha de A e' I_n . Assim, A e' decomposta em um produto de matrizes elementares, ou seja, existem $E_1, E_2, \dots, E_k$ matrizes elementares, tais que

$$A = E_k \dots E_2 E_1$$

Disto, temos que:

$$\det(A \cdot B) = \det(E_k \cdot \underbrace{E_{k-1} \dots E_1}_A \cdot B) =$$

$$= \det(E_k \cdot (E_{k-1} \dots E_1 B)) =$$

↑
MATRIZ
ELEMENTAR

$$= \det(E_k) \cdot \det(E_{k-1} E_{k-2} \dots B) = \dots$$

$$\dots = \det(E_k) \cdot \det(E_{k-1}) \cdot \dots \det(E_1) \cdot \det B$$

$$= \det(E_k \cdot E_{k-1}) \cdot \det(E_{k-2}) \dots \det(E_1) \cdot \det B = \dots$$

↑
juntando as
elementares

$$\dots = \det (\underbrace{E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1}_A) \cdot \det B =$$

$$= \underline{\underline{\det A \cdot \det B.}}$$

Se A não for invertível, então a forma escalonada reduzida por linhas de A não será a I_n ; então sua forma escalonada reduzida por linhas terá uma (ou mais) linha nula.

Logo, $\det A = 0$.

Além disso, $A \cdot B$ será tal que também terá uma linha nula (ou duas linhas iguais).

Então, $\det AB = 0$.

Ou seja;

$$\underline{\underline{\det AB = 0 = \det A = \underline{\underline{\det A \cdot \det B}}}}$$

↑
ou uma linha
múltipla de
outra.

□

MATRIZ ADJUNTA.

Def.: Dada uma matriz quadrada

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

definimos a matriz adjunta de A , e escrevemos $\text{adj}(A)$, a matriz dos cofatores:

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \vdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \vdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \vdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

onde

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$$

Note que os cofatores que definem a $\text{adj}(A)$ são tomados da forma transposta aos respectivos elementos da matriz A . Isto se deve por uma razão prática:

$$A \cdot \text{adj}(A) = \det(A) \cdot I$$

De fato:

$$\underline{A \cdot \text{adj}(A)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{m1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1m} & A_{2m} & \dots & A_{mm} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m a_{1j} \cdot A_{1j} & \sum_{j=1}^m a_{1j} \cdot A_{2j} & \dots & \sum_{j=1}^m a_{1j} \cdot A_{mj} \\ \sum_{j=1}^m a_{2j} \cdot A_{1j} & \sum_{j=1}^m a_{2j} \cdot A_{2j} & \dots & \sum_{j=1}^m a_{2j} \cdot A_{mj} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^m a_{mj} \cdot A_{1j} & \sum_{j=1}^m a_{mj} \cdot A_{2j} & \dots & \sum_{j=1}^m a_{mj} \cdot A_{mj} \end{pmatrix}$$

Annotations:
 - The first row of the matrix is circled in blue.
 - The first column of the matrix is circled in green.
 - The diagonal elements are circled in green.
 - The off-diagonal elements are circled in blue.
 - The first row is labeled "det A".
 - The first column is labeled "0".
 - The diagonal elements are labeled "0".
 - The off-diagonal elements are labeled "det A".

$$= \begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \det A \end{pmatrix} = \underline{\underline{(\det A) \cdot I}}$$

LEMA DA
AULA PASSADA -

Da seja, comprovemos que

$$A \cdot (\text{adj} A) = (\det A) \cdot I.$$

Suponha agora que A seja invertível. Então, existe a inversa A^{-1} . Da igualdade acima, multiplicando à esquerda por A^{-1} , vem:

$$A^{-1} \cdot (A \cdot \text{adj} A) = \overset{\in \mathbb{R}}{A^{-1} \cdot (\det A)} I$$

$$\underbrace{(A^{-1} \cdot A)}_{I''} \cdot \text{adj} A = (\det A) \cdot A^{-1}$$

$$\text{adj} A = (\det A) \cdot A^{-1}.$$

Como A é invertível, $\det A \neq 0$.

Dividindo por $\det A$, vem:

$$\frac{1}{\det A} \cdot \text{adj} A = \frac{\cancel{\det A}}{\cancel{\det A}} \cdot A^{-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj} A}$$

Daí seja, acordemos de provar o seguinte resultado:

TEOREMA: Se A for invertível, então, sua inversa pode ser calculada fazendo

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj } A \quad ;$$

onde $\text{adj } A$ denota a matriz adjunta de A .

Com isso, temos duas formas de se obter a inversa de uma matriz quadrada A :

- através de op. elementares sobre linhas:

$$(A : I) \xrightarrow{e_1} \xrightarrow{e_2} \dots \xrightarrow{e_k} (I : A^{-1})$$

- através da adjunta

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj } A.$$


Atendendo a pedidos, vamos ver um exercício do livro.

Fig. 64; exercício 31-b: calcular o determinante:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\det A = \cancel{0} \cdot A_{31} + 1 \cdot A_{32} + 6 \cdot A_{33} + \cancel{0} \cdot A_{34}$$

$$= 1 \cdot A_{32} + 6 \cdot A_{33}, \text{ onde:}$$

$$\bullet \quad \underline{A_{32}} = (-1)^{3+2} \cdot \det(M_{32}) =$$

$$-1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 2 \\ -3 & -3 & 1 & -3 & -3 \\ 2 & 2 & -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= - [3 + 4 + \cancel{12} - \cancel{12} - 2 - 6] = - (-1) = \underline{\underline{1.}}$$

• $\underline{A_{33}} = (-1)^{3+3} \cdot \det(M_{33}) =$

$$+1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Diagram showing the calculation of the determinant of the 3x3 matrix M_{33} using Sarrus' rule. The first matrix is $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ and the second is $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$. Blue arrows indicate the products to be added (down-right, up-right, down-left) and green arrows indicate the products to be subtracted (up-left, down-right, up-right).

$$= -2 - 2 + 6 + 8 - 1 + 3 = \underline{\underline{12}}$$

Answer, determinant:

$$\det A = 1 \cdot A_{32} + 6 \cdot A_{33} = 1 \cdot (1) + 6 \cdot (12)$$

$$= 1 + 72 = \underline{\underline{73}}$$
