ÁLGEBRA LINEAR I

14/10/25 - AULA 09

Uma consequência do último resultado visto na aula passada é o seguinte corolário:

COROLÁRIO Sendo I_n a matriz identidade de ordem n, então,

$$\det(I_n) = 1.$$

DEMONSTR.: Basta notar que I_n é uma matriz triangular; logo, $\det I = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1}_{n \text{ fatores}} = 1$. $\square$

PROPOSIÇÃO: Seja A_n uma matriz quadrada. Então:

(i) Se A_n possui uma linha nula ou uma coluna nula, então, $\det A = 0$.

(ii) Se A_n possui duas linhas iguais, então, $\det A = 0$.

<u>DEMONSTR.:</u> Faremos apenas a prova de (i), visto que para provar (ii) precisaremos de outro resultado que será apresentado a posteriori.

(i) Suponha que A_n possua uma linha nula. Então, desenvolvendo o $\det A$ sobre esta linha i_0, vamos obter:

$$\det A = a_{i_0 1} \cdot A_{i_0 1} + a_{i_0 2} \cdot A_{i_0 2} + \dots + a_{i_0 n} \cdot A_{i_0 n} ;$$

onde

$$A_{i_0 j} = (-1)^{i_0 + j} \cdot \det(M_{i_0 j}) \quad e \quad a_{i_0 j} = 0 ,$$

$\forall j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Ou seja, concluímos que $\det A = 0$.

$\square$

No que segue, vamos investigar o que ocorrerá com o determinante de uma dada matriz, se efetuarmos uma operação elementar sobre linhas na referida matriz.

Antes, porém, necessitamos de um LEMA:

LEMA: Seja A_n uma matriz quadrada. Então:

$$a_{i1} \cdot A_{l_1} + a_{i2} \cdot A_{l_2} + \dots a_{in} \cdot A_{l_n} = \begin{cases} \det A, & \text{se } i = l \\ 0, & \text{se } i \neq l. \end{cases}$$

DEMONSTR.: Se $i = l$, a expressão acima resulta em:

$$a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \dots + a_{in} \cdot A_{in} = \det A,$$

conforme a definição de determinante.

Considere então o caso $i \neq l$.

Seja $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$.

Define a matriz $\tilde{A}$ a partir de A do seguinte modo: substituindo a linha l pela linha i'; ou seja,

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ - & - & - & - \\ a_{i'1} & a_{i'2} & \cdots & a_{i'n} \\ - & - & - & - \\ a_{i'1} & a_{i'2} & \cdots & a_{i'n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \to \text{linha } i' \\ \\ \to \text{linha } l \\ \text{[agora com os elementos da linha } i'] \\ \\ \end{array}$$

Pela proposição anterior, pelo fato de $\tilde{A}$ possuir duas linhas iguais, segue que $\det \tilde{A} = 0$.

Desenvolvendo $\det \tilde{A}$ na linha l, temos:

$$0 = \det \tilde{A} = \underbrace{a_{l1}}_{= a_{i'1}} \cdot A_{l1} + \underbrace{a_{l2}}_{= a_{i'2}} \cdot A_{l2} + \cdots + \underbrace{a_{ln}}_{= a_{i'n}} \cdot A_{ln}$$

$$\Rightarrow a_{i'1} \cdot A_{l1} + a_{i'2} \cdot A_{l2} + \cdots + a_{i'n} \cdot A_{ln} = 0$$

$\square$

TEOREMA: Seja A_n uma matriz quadrada de ordem n, com determinante $\det A$. Então:

(i) Se trocarmos duas linhas quaisquer de posição de A, então o determinante dessa nova matriz muda de sinal.

Simbolicamente:

$$A \xrightarrow[l_i \leftrightarrow l_j]{e:} E.A.$$

$$\downarrow$$

$$\det A \longmapsto \det(EA) = -\det A.$$

(ii) Se multiplicarmos uma linha de A por $k \neq 0$, então o determinante dessa nova matriz será k. vezes o determinante da matriz original. Simbolicamente:

$$A \xrightarrow[l_i \leftrightarrow k.l_i]{e:} E.A$$

$$\downarrow$$

$$\det A \longmapsto \det(E.A) = k.\det A.$$

(iii) Se substituirmos uma linha de A por ela mesma mais um múltiplo de outra linha, o determinante dessa nova matriz continua sendo o determinante da matriz original. Simbolicamente:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, squiggly, "e:"', "l_i \to l_i + k l_j"] \arrow[d] & EA \\ \det A \arrow[r, mapsto] & \det(EA) = \det A. \end{tikzcd}$$

DEMONSTRAÇÃO:

(i)
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, squiggly, "e: l_i \leftrightarrow l_j"] \arrow[d] & EA \arrow[d] \\ \det A & \det(EA) = -\det A \end{tikzcd}$$

Faremos a prova por indução sobre a ordem da matriz.

(a) $n = 2$: (base da indução).

Seja $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Então, $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$

$$= a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Considere trocar $l_1 \leftrightarrow l_2$. Assim, temos

$$EA = \tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det \tilde{A} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{12} \cdot a_{21} - a_{11} \cdot a_{22}$$

$$= -\det A.$$

Note também que, neste caso,

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad e \det(E) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1.$$

Ou seja, $\det EA = -\det A = (-1) \cdot \det A$

$$= \det E \cdot \det A$$

Logo, vale a base da indução.

(b) Suponha que o resultado seja válido para toda matriz de tamanho k, ou seja, que, trocando duas linhas quaisquer de uma matriz B_k, tem-se que

$$\det \tilde{B}_k = \det E.B_k = -\det B_k .$$

(fazendo $l_i \leftrightarrow l_j$)

Precisamos mostrar que isto vale para matrizes de tamanho $k+1$. Seja A_{k+1}, com determinante $\det A$.

Vamos trocar duas linhas quaisquer de posição, linhas p e q; obtendo a matriz $EA := \tilde{A}$. Assim, desenvolvendo $\det(EA)$ sobre uma linha i, diferente das linhas p e q, vamos obter:

$$\det EA = a_{i1} \cdot (EA)_{i1} + a_{i2} \cdot (EA)_{i2} + \dots +$$

$$+ a_{i\,k+1} (EA_{i\,k+1}),$$

onde $(EA)_{ij}$ é o cofator do elemento a_{ij} da matriz EA, onde $(EA)_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(\tilde{M}_{ij})$.

Neste caso, $\tilde{M}_{ij}$ é uma matriz $k \times k$, retirando-se a linha i e a coluna j de EA.

Então,

$$\det \tilde{M}_{ij} = -\det M_{ij}, \text{ sendo que}$$

M_{ij} é a matriz $k \times k$ obtida de A, extraindo a linha i e a coluna j da mesma, e como EA troca linha p com linha q, segue pela hipótese da indução a igualdade acima. Disso, segue que:

$$\det(EA) = a_{i1}\cdot(EA_{i1}) + a_{i2}\cdot(EA_{i2}) + \dots$$

$$\dots + a_{i\,k+1}(EA_{i\,k+1}) =$$

$$= a_{i1}\cdot(-1)^{i+1}\cdot\det(\tilde{M}_{i1}) + a_{i2}\cdot(-1)^{i+2}\cdot\det(\tilde{M}_{i2}) +$$

$$\dots + a_{i\,k+1}(-1)^{i+k+1}\cdot\det(\tilde{M}_{i,k+1}) =$$

$$= a_{i1}\cdot(-1)^{i+1}\cdot(-\det M_{i1}) + a_{i2}\cdot(-1)^{i+2}\cdot(-\det M_{i2}) +$$

$$\dots + a_{i,k+1}(-1)^{i+k+1}\cdot(-\det M_{i,k+1})$$

$$= -\Big(\underbrace{a_{i1}\cdot(-1)^{i+1}\cdot\det M_{i1} + \dots + a_{i,k+1}(-1)^{i+k+1}\cdot\det(M_{i,k+1})}_{=\det A.}\Big)$$

$$= -\det A.$$

Isso conclui (b). De (a) e (b) segue o resultado por indução, provando o item (i).

$$(ii) \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{l_i \hookrightarrow k \cdot l_i} & EA \\ \downarrow & & \downarrow \\ \det A & & \det(EA) = k \cdot \det A. \end{array} \quad :$$

Seja $k \neq 0$ e considere uma linha i_0 tal que a nova matriz terá a linha i_0 substituída por $k \cdot i_0$. Ou seja:

$$l_{i_0} \hookrightarrow k \cdot l_{i_0} :$$

$$EA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ - & - & - & - \\ \boxed{k \cdot a_{i_0 1} & k \cdot a_{i_0 2} & \dots & k \cdot a_{i_0 n}} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \rightarrow \text{linha } i_0.$$

Ou seja; $E = \begin{cases} k, & \text{se } i = j = i_0 \\ 1, & \text{se } i = j \,;\, i \neq i_0 \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$

$$E = \operatorname{diag}(1, 1, 1, \dots, \underset{\uparrow \text{ posição } i_0}{k}, \dots 1)$$

Note que, neste caso;

$$\boxed{\det E = k.}$$

Dessa forma, observamos que; desenvolvendo o $\det(EA)$ pela linha k, teremos:

$$\det(EA) = k \cdot a_{i_0 1} \cdot (EA)_{i_0 1} + k \cdot a_{i_0 2} \cdot (EA)_{i_0 2} + \dots +$$

$$\dots + k \cdot a_{i_0 m} (EA)_{i_0 m}$$

$$= k \cdot \left[a_{i_0 1} \cdot (EA)_{i_0 1} + \dots + a_{i_0 m} (EA)_{i_0 m} \right]; \text{ onde}$$

$(EA)_{i_0 j} = (-1)^{i_0 + j} \det(\tilde{M}_{i_0 j})$, onde $\tilde{M}_{i_0 j}$ é a matriz menor obtida de EA retirando-se a linha i_0 e a coluna j. Como foi a linha i_0 que foi perturbada pela operação elementar, segue que

$$\tilde{M}_{ij} = M_{ij},$$

onde M_{ij} é a matriz menor da matriz A.

Assim, tem-se:

$$\det(EA) = k \cdot \left[a_{i_0 1} \cdot (-1)^{i_0+1} \cdot \det(\tilde{M}_{i_0 1}) + \dots \right.$$

$$\left. \dots a_{i_0 n} \cdot (-1)^{i_0+n} \cdot \det(\tilde{M}_{i_0 n}) \right]$$

$$= k \cdot \underbrace{\left[a_{i_0 1} \cdot (-1)^{i_0+1} \cdot \det(M_{i_0 1}) + \dots + a_{i_0 n} (-1)^{i_0+n} \cdot \det(M_{i_0 n}) \right]}_{= \det A}$$

$$= k \cdot \det A.$$

Além disso, tem-se que

$$\det(EA) = \underbrace{k}_{= \det(E)} \cdot \det A = \det(E) \cdot \det A.$$

Isso prova a propriedade (iii).

(iii)

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, squiggly, "l_i \to l_i + k.l_j"] \arrow[d] & & EA \arrow[d] \\
\det(A) & & \det(EA) = \det A.
\end{tikzcd}$$

Seja $A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Sejam $i \neq j$ e considere a matriz elementar E tal que $l_i \to l_i + k.l_j$; $k \neq 0$.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & \boxed{k} & \cdots 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix} \to \text{linha } i \; ;$$

que será uma matriz triangular, superior ou inferior, dependendo se tomarmos $i > j$ ou $i < j$. De qualquer modo, na diagonal de E, todos os elementos são 1. Assim:

$$\det E = 1.$$

A matriz EA será:

$$EA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{i1} + k a_{j1} & a_{i2} + k \cdot a_{j2} & \cdots & a_{in} + k \cdot a_{jn} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

linha i

Assim, teremos que, desenvolvendo o det(EA) sobre a linha i, vamos encontrar:

$$\det(EA) = (a_{i1} + k a_{j1}) \cdot (EA)_{i1} + (a_{i2} + k a_{j2}) \cdot (EA)_{i2} + \cdots$$

$$\cdots + (a_{in} + k \cdot a_{jn}) \cdot (EA)_{in} ;$$

e como $(EA)_{il} = (-1)^{i+l} \cdot \det(\tilde{M}_{il})$, onde

$\tilde{M}_{il}$ é a matriz menor de EA obtida retirando-se a linha i (que fora alterada) e a coluna l, segue que

$$\tilde{M}_{il} = M_{il} \quad \text{[ou seja, resulta}$$

na mesma matriz menor de A]. Assim:

$$\det(EA) = (a_{i1} + k a_{j1}) \cdot (-1)^{i+1} \cdot \det(M_{i1}) + \dots + (a_{in} + k \cdot a_{jn}) \cdot (-1)^{i+n} \cdot \det(M_{in})$$

$$= \underbrace{a_{i1} \cdot (-1)^{i+1} \cdot \det(M_{i1}) + \dots + a_{in} \cdot (-1)^{i+n} \cdot \det(M_{in})}_{=\det A} +$$

$$+ k \cdot \Big(\underbrace{a_{j1} \cdot (-1)^{i+1} \det(M_{i1}) + \dots + a_{jn} \cdot (-1)^{i+n} \det(M_{in})}_{=0 \text{ por proposição}} \Big)$$

$$= \det A.$$

Conclusão:

$$\det(EA) = \det A.$$

Obs.: Note que neste caso tem-se que

$$\det(EA) = 1.\det A = \det(E).\det(A)$$

$\square$