ÁLGEBRA LINEAR I

02/10/25 – AULA 06

No final da aula passada vimos um algoritmo para obter a inversa de uma matriz quadrada, caso exista.

$$(A \mid I) \overset{e_1}{\rightsquigarrow} \overset{e_2}{\rightsquigarrow} \overset{e_3}{\rightsquigarrow} \cdots \overset{e_k}{\rightsquigarrow} (I \mid A^{-1})$$

Se, durante esse procedimento, no bloco que deve ser transformado na identidade I zerarmos toda uma linha ou toda uma coluna, segue que a matriz A não será inversível.

Ex.: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad A^{-1} = ?$

$$(A \mid I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\ell_1 \hookrightarrow \frac{1}{2}\ell_1}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} -4 & -2 & -2 & -2 & & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow{\ell_3 \hookrightarrow \ell_3 - 4 \cdot \ell_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 0} & & & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

ZERAMOS TODA UMA LINHA NO BLOCO ONDE DEVERÍAMOS OBTER A^{-1}. ENTÃO, A FORMA ESCALONADA REDUZIDA POR LINHAS DE A NÃO SERÁ I_3. LOGO, A NÃO É INVERSÍVEL. (DEVIDO À NEGATIVA DO TEOREMA DA AULA PASSADA.

CAP. II: DETERMINANTES

INTRODUÇÃO: Dada uma matriz quadrada A_n, queremos verificar, de forma simples, se a mesma é inversível. Para isso, vamos associar a matriz a um número real, o qual será chamado de determinante da matriz dada.

Vamos iniciar com os casos mais simples, para depois chegarmos no resultado geral.

CASO I: matriz $A_{1\times 1}$. Ou seja, a matriz $A = (a_{11})$ é apenas um número real. Neste caso 1×1, a identidade será $I = (1)$

Então $A = (a_{11})$ será inversível se, e somente se, $\exists\ A^{-1}$ tal que

$$A \cdot A^{-1} = I \quad \text{e} \quad A^{-1} \cdot A = I.$$

Neste caso 1×1:

$$(a_{11}) \cdot A^{-1} = (1) \quad \text{e} \quad A^{-1} \cdot (a_{11}) = (1)$$

$$\Longleftarrow, \quad A^{-1} = \frac{1}{a_{11}}, \quad \text{pois neste}$$

caso, $\cancel{a_{11}} \cdot \dfrac{1}{\cancel{a_{11}}} = 1$; e $\dfrac{1}{\cancel{a_{11}}} \cdot \cancel{a_{11}} = 1$,

o que tem sentido se, e somente, se $a_{11} \neq 0$.

CONCLUSÃO: $A = (a_{11})_{1\times 1}$ é inversível se, e somente se, $a_{11} \neq 0$.

Vamos definir o determinante de A por

$$\det A_{1\times 1} = a_{11}.,$$

Disso, segue que:

$$A_{1\times 1} \text{ é inversível} \Leftrightarrow \det A \neq 0.$$

<u>CASO 2:</u> $A_{2\times 2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Neste caso, $A_{2\times 2}$ será inversível se, e somente se, a forma escalonada reduzida por linhas de A for $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Para isto acontecer, devemos impor que $a_{11} \neq 0$ ou $a_{21} \neq 0$ (pois se ambos forem zero, teríamos a 1ª coluna de A nula, e então a forma escalonada reduzida por linhas de A não seria I_2, e queremos exigir um critério para inversibilidade de A).

Sem perda de generalidade, suponha que $a_{11} \neq 0$.

[pois se $a_{11} = 0$, então $a_{21} \neq 0$ e trocaríamos $l_1 \leftrightarrow l_2$]

Assim, segue que:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}^{\neq 0} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \xrightarrow{l_1 \hookrightarrow \frac{1}{a_{11}} \cdot l_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad -a_{21} \cdot \frac{a_{12}}{a_{11}}$$

$$\xrightarrow{l_2 \hookrightarrow l_2 - a_{21} \cdot l_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} \\ 0 & a_{22} - a_{21} \cdot \frac{a_{12}}{a_{11}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} \\ 0 & \frac{\boxed{a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}}}{a_{11}} \end{pmatrix} \quad a_{11} \neq 0$$

DEVEMOS EXIGIR QUE ESTE NUMERADOR SEJA DIFERENTE DE ZERO.

POIS SENÃO TEREMOS TODA A SEGUNDA LINHA NULA, E DISSO, A_2 NÃO SERIA INVERSÍVEL

Disso, vamos definir o determinante de A_2 por:

$$\det A_{2\times 2} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Assim, $A_{2\times 2}$ é inversível $\iff$ a forma escalonada reduzida por linhas de A for I_2 $\iff$

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} \neq 0.$$

Uma forma MNEMÔNICA (simbólica) de representar (e calcular) o determinante de $A_{2\times 2}$ é escrever:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}$$

$-$ $\qquad$ $+$

<u>CASO 3</u>: $\quad A_{3\times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Queremos impor uma condição para que $A_{3\times 3}$ seja inversível. Para isso, a forma escalonada reduzida por linhas de $A_{3\times 3}$ deve ser I_3.

Para isso acontecer, toda a 1ª coluna deve ser diferente de zero. Sem perda de generalidade, assuma que $a_{11} \neq 0$. Assim:

$$A = \begin{pmatrix} \overset{\neq 0}{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_2 \hookrightarrow \frac{1}{a_{11}}\ell_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{l_2 \hookrightarrow l_2 - a_{21} l_1 \\ l_3 \hookrightarrow l_3 - a_{31} l_1}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} \\ 0 & a_{22} - a_{21} \cdot \frac{a_{12}}{a_{11}} & a_{23} - a_{21} \cdot \frac{a_{13}}{a_{11}} \\ 0 & a_{32} - a_{31} \cdot \frac{a_{12}}{a_{11}} & a_{33} - a_{31} \cdot \frac{a_{13}}{a_{11}} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} \\ 0 & \frac{a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{11} \cdot a_{23} - a_{21} \cdot a_{13}}{a_{11}} \\ 0 & \frac{a_{11} \cdot a_{32} - a_{31} \cdot a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{11} \cdot a_{33} - a_{31} \cdot a_{13}}{a_{11}} \end{pmatrix}$$

↪ olhando para este sub-bloco,

∴ uma matriz 2x2, o mesmo

deverá ser reduzido à I_2 ; e para ser inversível, devemos exigir que

$$\begin{vmatrix} \dfrac{a_{11}\,a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}}{a_{11}} & \dfrac{a_{11}\cdot a_{23} - a_{21}\cdot a_{13}}{a_{11}} \\[2ex] \dfrac{a_{11}\cdot a_{32} - a_{31}\cdot a_{12}}{a_{11}} & \dfrac{a_{11}\cdot a_{33} - a_{31}\cdot a_{13}}{a_{11}} \end{vmatrix} \neq 0.$$

$$\frac{1}{a_{11}^2}\cdot\left[(a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21})\cdot(a_{11}\cdot a_{33}-a_{31}\cdot a_{13})\right] -$$

$$- \frac{1}{a_{11}^2}\cdot\left[(a_{11}\cdot a_{23}-a_{21}\cdot a_{13})\cdot(a_{11}\cdot a_{32}-a_{31}\cdot a_{12})\right]$$

$$= \frac{1}{a_{11}^2}\cdot\Big[a_{11}^2\cdot a_{22}\cdot a_{33} - a_{11}\cdot a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} - a_{11}\cdot a_{12}\, a_{21}\cdot a_{33} +$$

$$+ \cancel{a_{12}\, a_{13}\, a_{21}\cdot a_{31}} - a_{11}^2\, a_{23}\, a_{32} + a_{11}\cdot a_{12}\, a_{23}\, a_{31} +$$

$$+ a_{11}\, a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32} - \cancel{a_{12}\, a_{13}\, a_{21}\, a_{31}} \Big] =$$

$$= \frac{1}{a_{11}^{\cancel{2}}} \cdot \Big[\cancel{a_{11}} \cdot \big(a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} - a_{13}\, a_{22}\, a_{31} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33} - $$

$$ - a_{11}\, a_{23}\, a_{32} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32} \big) \Big]$$

$$= \frac{1}{a_{11}} \cdot \Big[a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32} - $$

$$ - a_{13}\, a_{22}\, a_{31} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32} \Big]$$

Assim, $A_{3\times 3}$ é invertível $\Leftrightarrow$ a forma escalonada reduzida por linhas de $A_{3\times 3}$ for I_3

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\underbrace{a_{11}}_{\neq 0}} \cdot \Big[a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32} - $$

$$ - a_{13}\, a_{22}\, a_{31} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32} \Big] \neq 0.$$

$$\Leftrightarrow a_{11} \cdot a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32} - $$

$$ - a_{13}\, a_{22}\, a_{31} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32} \neq 0.$$

e a este número chamamos de $\det A_{3\times 3}$.

Ou seja:

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32} -$$

$$- a_{13}\, a_{22}\, a_{31} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32}$$

Uma forma simbólica para memorizar o cálculo do determinante de $A_{3\times3}$ é escrever:

$$\det A = \left| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} - & - & - & + & + & + \end{array}$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} -$$

$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$