Fundação Universidade Federal de Pelotas
Disciplina de Álgebra Linear I
Lista 02 de Exercícios - Matrizes e Sistemas Lineares
Prof. Dr. Maurício Zahn

1. Considere os sistemas lineares

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+2y+2z=4 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+2y+2z=0 \end{cases}$$

   (a) Mostre que o primeiro sistema não possui soluções e escreva o que isso significa quanto aos planos representados por essas equações.

   (b) Mostre que o segundo sistema tem uma infinidade de soluções e escreva o que isso significa quanto aos plannos representados por essas equações.

2. Resolva cada sistema linear abaixo, pelo método de eliminação de *Gauss-Jordan* (ou seja, a matriz aumentada fica na forma escalonada reduzida por linhas)

$$\text{(a)} \begin{cases} x_1+x_2+2x_3=8 \\ -x_1-2x_2+3x_3=1 \\ 3x_1-7x_2+4x_3=10 \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} 2x_1+2x_2+2x_3=0 \\ -2x_1+5x_2+2x_3=1 \\ 8x_1+x_2+4x_3=-1 \end{cases}$$

3. Seja A uma matriz 3×3. Encontre uma matriz B para a qual BA é a matriz que resulta de A permutando as duas primeiras linhas e depois multiplicando a terceira linha por seis.

4. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

   (a) Encontre matrizes elementares E_1 e E_2 tais que $E_2E_1A = I$.

   (b) Escreva A^{-1} como um produto de matrizes elementares.

5. Mostre que se $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{pmatrix}$ é uma matriz elementar, então $ab = 0$.

6. Sejam e_1, e_2 e e_3, respectivamente, as operações sobre linhas:
"Trocar as linhas ℓ_1 e ℓ_2"; "Substituir ℓ_3 por $7\ell_3$" e *" Substituir ℓ_2 por $-3\ell_1+\ell_2$"*.
Determine as matrizes quadradas elementares de ordem 3 correspondentes E_1, E_2 e E_3.

7. Sejam A, B e C matrizes $n\times n$ tais que $A = BC$. Prove que se B é invertível, então qualquer sequência de operações elementares sobre as linhas que reduz B a I_n, também reduz A a C.

8. Utilizando-se do algoritmo para obter inversas de matrizes, encontre a inversa A^{-1} de A em cada caso, se A for inversível.

$$\text{(a) } A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -7 & -1 \\ 8 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{(b) } A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{(c) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{(d) } A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

9. Reduza cada uma das matrizes abaixo à forma canônica escalonada reduzida por linhas.

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 1 & 10 & 13 \\ 8 & 8 & -1 & 26 & 19 \end{pmatrix}$ (b) $B = \begin{pmatrix} 5 & -9 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

10. Considere o sistema linear a seguir:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y + 2z = 2 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases} \tag{1}$$

(a) Resolva-o aplicando operações elementares sobre linhas.

(b) Reescrevendo o sistema (1) na notação matricial

$$Ax = b\,, \tag{2}$$

podemos encontrar o valor da matriz-solução x, multiplicando (2) à esquerda por A^{-1}, se esta inversa existir. Encontre A^{-1} e obtenha o valor de x dessa forma. Compare sua resposta com a obtida no item anterior.

11. Verifique se o sistema homogêneo abaixo possui uma solução não nula:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + 4y - z = 0 \\ 3x + 2y + 2z = 0 \end{cases} .$$

12. Resolva cada sistema linear abaixo:

(a) $\begin{cases} x + 2y - 4z = -4 \\ 2x + 5y - 9z = -10 \\ 3x - 2y + 3z = 11 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x + 2y - 3z = -1 \\ -3x + y - 2z = -7 \\ 5x + 3y - 4z = 2 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 2x + 5y - 8z = 4 \\ 3x + 8y - 13z = 7 \end{cases}$

13. Uma técnica importante para resolução de integrais de funções racionais é decompor a expressão que define a função racional em frações parciais de uma forma adequada. Por exemplo, para resolver uma integral da forma $\int f(x)dx$, onde

$$f(x) = \frac{3x^3 + 4x^2 - 6x}{(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 1)},$$

a decomposição a ser feita é determinar as constantes A, B, C e D tais que

$$\frac{3x^3 + 4x^2 - 6x}{(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 1)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2x + 2} + \frac{C}{x - 1} + \frac{D}{x - 1}$$

se torne uma identidade. Determine os valores das constantes A, B, C e D para que a igualdade acima se torne uma identidade.

14. O etano (C_2H_6) queima em oxigênio para produzir óxido de carbono (IV) CO_2 e vapor. O vapor se condensa para formar gotículas de água. A equação dessa reação química é dada por

$$C_2H_6 + O_2 \longrightarrow CO_2 + H_2O.$$

Faça o seu balanceamento.

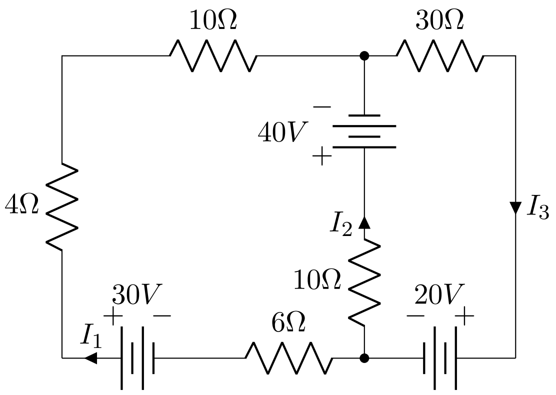
15. Equilibrar as seguintes equações químicas, via sistemas lineares:

    (a) $HC\ell + Na_3PO_4 \longrightarrow H_3PO_4 + NaC\ell$

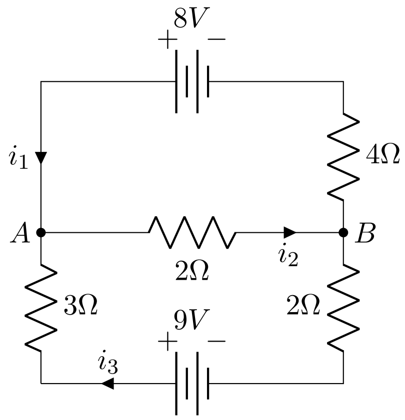
    (b) $C_3H_8 + O_2 \longrightarrow CO_2 + H_2O$ (queima do propano)

16. De acordo com as orientações das correntes elétricas I_1, I_2 e I_3 indicadas no circuito abaixo, usando as leis das correntes e das tensões de Kirchoff, determine-as.

    (a)



    (b)



17. Determine as incógnitas E, I_1 e I_2 do circuito abaixo: