ÁLGEBRA LINEAR I

07/10/25 – AULA 07

Seguindo o estudo de determinantes iniciado na aula passada, vimos que:

- $A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

$-$ $+$

- $A_{3\times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$-$ $-$ $-$ $+$ $+$ $+$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \, a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} -$$

$$- a_{13} \, a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

Em ambos os casos, vimos que A é inversível se, e somente se, $\det A \neq 0$.

No que segue, vamos estabelecer uma forma geral para cálculo de determinantes para matrizes $A_{n \times n}$.

Para isso, revisitemos os casos anteriores.

CASO 1: $A_{2\times 2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Vamos definir as matrizes menores M_{11} e M_{12}, respectivamente, por:

$$M_{11} = (a_{22})_{1\times 1} \quad ; \quad M_{12} = (a_{21})_{1\times 1} \; ;$$

ou seja, M_{11} resulta de retirar a linha 1 e a coluna 1 de A e M_{12} resulta em retirar a linha 1 e a coluna 2 de $A_{2\times 2}$.

Note que $\det(M_{11}) = a_{22}$ e $\det(M_{12}) = a_{21}$.

Disso, teremos:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot \underbrace{a_{22}}_{\det(M_{11})} - a_{12} \cdot \underbrace{a_{21}}_{\det(M_{12})} =$$

$$= a_{11} \cdot \det(M_{11}) - a_{12} \cdot \det(M_{12})$$

Vamos impor este mesmo argumento para o caso 3x3:

CASO 2: $$A_{3\times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Defina as matrizes menores:

$$M_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \; ; \; M_{12} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$M_{13} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

Dessa forma:

- $\det(M_{11}) = a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32}$
- $\det(M_{12}) = a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{31}$
- $\det(M_{13}) = a_{21} \cdot a_{32} - a_{22} \cdot a_{31}$.

Assim, teremos:

$$\det A = \left| \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{cccccc} - & - & - & + & + & + \end{array}$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} -$$

$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

$$= a_{11}\cdot(\underbrace{a_{22}\cdot a_{33} - a_{23}\cdot a_{32}}_{\det(M_{11})}) - a_{12}(\underbrace{a_{21}\cdot a_{33} - a_{23}a_{31}}_{\det(M_{12})}) +$$

$$+ a_{13}\cdot(\underbrace{a_{21}\cdot a_{32} - a_{22}\cdot a_{31}}_{\det(M_{13})})$$

$$= a_{11}\cdot \det(M_{11}) - a_{12}\det(M_{12}) + a_{13}\cdot \det(M_{13})$$

Isto indica que podemos obter uma definição geral para determinante de uma matriz $n\times n$.

Antes, porém, é interessante apresentar o seguinte conceito:

<u>Def.:</u> Seja $A_{n\times n}$ uma matriz quadrada. Definimos a matriz menor M_{ij} de A como sendo uma matriz $(n-1)\times(n-1)$, obtida de A, retirando-se a linha i e a coluna j da mesma. Definimos também o cofator A_{ij} de M_{ij} por:

$$A_{ij} = \underbrace{(-1)^{i+j}}_{} \det(M_{ij}).$$

PARA EFETUAR A "CORREÇÃO" DO SINAL.

Isto posto, podemos, finalmente, apresentar uma definição geral para determinante de uma matriz $A_{n\times n}$.

Def.: Dada $A_{n\times n}$ matriz, definimos o determinante de A por:

$$\det A = \begin{cases} a_{11}, & \text{se } n = 1. \\ a_{11}\cdot A_{11} + a_{12}\cdot A_{12} + \dots + a_{1n}\cdot A_{1n}, & \text{se } n \neq 1. \end{cases}$$

(expandido sobre a linha 1 de A)

A definição acima pode ser aplicada em outra linha ou em uma coluna qualquer.

Ou seja, sendo $A_{n \times n}$, $n > 1$; em geral, teremos:

$$\det A = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \dots + a_{in} \cdot A_{in}$$

$$= (-1)^{i+1} \cdot a_{i1} \cdot \det(M_{i1}) + (-1)^{i+2} \cdot a_{i2} \cdot \det(M_{i2}) + \dots + (-1)^{i+n} \cdot a_{in} \cdot \det(M_{in})$$

Ex.: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. $\det A = ?$

Pela regra usual 3x3, temos:

$$\det A = \left| \begin{matrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{matrix}$$

$$= 0 - 12 - \cancel{2} - 0 + \cancel{2} + 4$$

$$= -8$$

Pelo resultado geral, desenvolvendo-se pela 2ª coluna:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = -2 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{22} - 1 \cdot A_{32}, \quad \text{onde:}$$

- $A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \det(M_{12}) = - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$

$$= -(2 \cdot 1 - 3 \cdot 2) = -(-4) = +4$$

- $A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \det(M_{22})$ (mas nem precisamos calcular pois o seu multiplicador é zero)

- $A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \det(M_{32}) = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

$$= -(2 - 2) = 0$$

Assim:

$$\underline{\underline{\det A}} = -2 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{22} - 1 \cdot A_{32}$$

$$= -2 \cdot (4) + 0 - 1(0) = \underline{\underline{-8}}$$

O próximo passo que devemos dar é explorar propriedades de determinantes. Porém, tais propriedades deverão ser gerais, i.e., deverão valer para matrizes $A_{n \times n}$, $\forall n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$.

Para isso, é necessário ter em mente o importante PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA, que serve para provar propriedades que envolvem números naturais.

Por exemplo, como mostrar que

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}, \ \forall n \in \mathbb{N} ?$$

Não podemos testar para todo $n \in \mathbb{N}$, pois $\mathbb{N}$ é infinito. Testar para $n=1$, $n=2$, $n=3, \ldots, n = 10.000$ apenas verificaria para estes valores, e não para os infinitos valores de $n \in \mathbb{N}$.

O que se faz é provar indutivamente.

O princípio da indução matemática é enunciado por:

PROP.: (PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA).

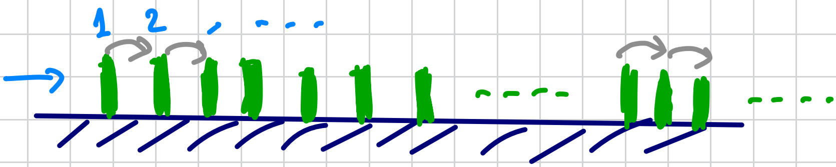
Seja $P(n)$ uma afirmação referente a $n \in \mathbb{N}$, $n \geq a$. $(a \in \mathbb{N})$. Então, se:

(i) $P(a)$ for verdadeira;

(ii) $P(k)$ é verdadeira para um certo $k \in \mathbb{N}$, implicar em $P(k+1)$ também ser verdadeira;

então, $P(n)$ será verdadeira, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq a$.

Uma ideia do princípio: considere um jogo com <u>infinitos</u> peças de dominó, em pé enfileirados. O objetivo é derrubar todas as peças.



Sabemos que todas as peças cairão se:

(i) derrubarmos a primeira peça;

(ii) a queda de uma peça qualquer produz a queda da peça seguinte.

O item (i) chama-se BASE DA INDUÇÃO.

O item (ii): $P(k) \Longrightarrow P(k+1)$ chama-se HIPÓTESE E TESE DA INDUÇÃO.

Aplicando o princípio da indução matemática o nosso exemplo.

01) Mostre que

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

<u>Solução</u>:

(i) $n=1$. (BASE DA INDUÇÃO):

temos:

$$1 \overset{?}{=} \frac{1.(1+1)}{2} = \frac{1.\cancel{2}}{\cancel{2}} = 1. \quad \underline{\underline{\text{ok!}}}$$

Logo, vale a base da indução.

(ii) Suponha a igualdade verdadeira para um certo $n=k$, ou seja, suponha que

$$1+2+3+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2} \qquad (*)$$

Precisamos mostrar que vale para $n=k+1$, ou seja, mostrar que

$$1+2+3+\cdots+(k+1) = \frac{(k+1).(k+2)}{2}.$$

Da hipótese de indução $(*)$, tem-se:

$$1+2+3+\cdots+k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Somando $k+1$, vem:

$$1+2+3+\cdots+k+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

$$= (k+1)\left[\frac{k}{2}+1\right]$$

$$= (k+1).\left(\frac{k+2}{2}\right)$$

$$= \frac{(k+1).(k+2)}{2}$$

Logo, vale (ii)

Assim, pelos itens (i) e (ii) o resultado segue por indução, i.e.;

$$1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$