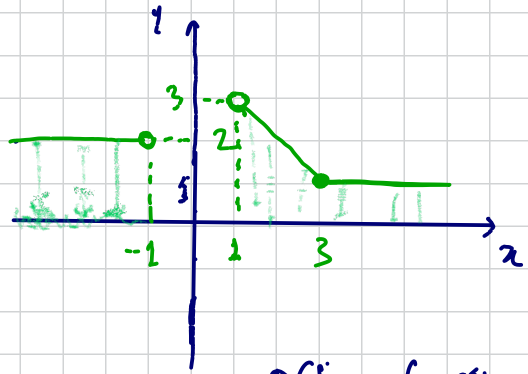
CÁLCULO 1A

30/09/25 - AULA 05

Na aula passada iniciamos o estudo de funções. Vimos como identificar domínio e imagem a partir do gráfico. Vejamos mais um exemplo:

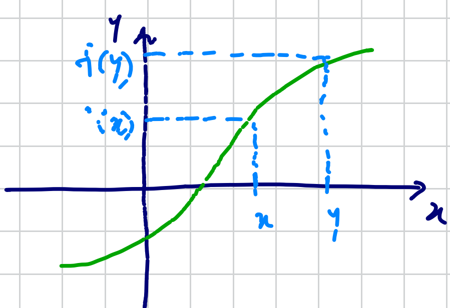
Ex.:



$D(f) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

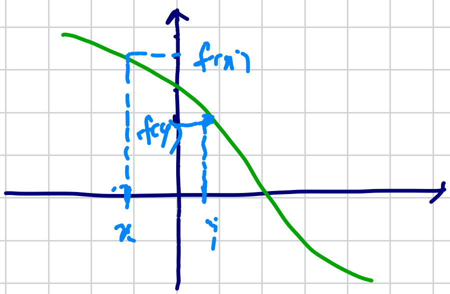
$Im(f) = [1, 3)$

Def.: Dizemos que uma função $f: A \to B$ é crescente se $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$



Def.: Dizemos que $f: A \to B$ é decrescente se

$$x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$$

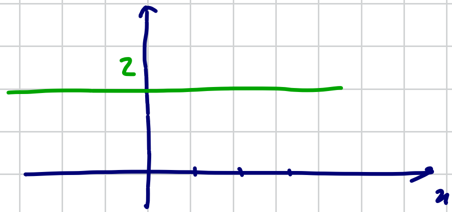


Def.: Dizemos que $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função polinomial de 1º grau se ela for da forma

$$f(x) = ax + b \; ; \quad \text{com } a, b \in \mathbb{R}.$$

Ex.: $f(x) = 3x - 1$.

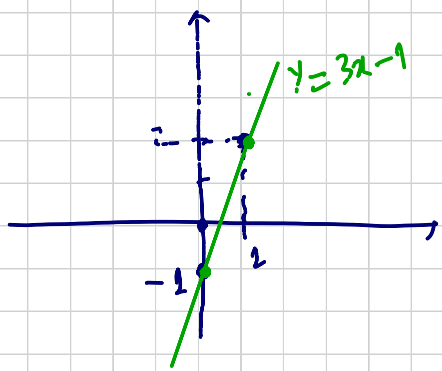
Quando $a = 0$ a função f chama-se FUNÇÃO CONSTANTE. Ex.: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = 2$



O gráfico de uma função polinomial de 1º grau é uma reta. Como dois pontos definem uma reta, basta escolher 2 pontos quaisquer sobre o gráfico de f para traçar a reta.

Ex.: ... $3x - 1$

x	$f(x) = 3x$ ...
0	$3 \cdot 0 - 1 = -1$
1	$3 \cdot (1) - 1 = 2$



PROPOSIÇÃO: Dada $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$; então se $a > 0$ f é crescente e se $a < 0$, f será decrescente.

DEMONSTR.: Suponha $a > 0$. Então, dados $x < y$, temos:

$$x < y \xRightarrow[\times\, a>0]{} ax < ay \xRightarrow[+b]{} \underbrace{ax+b}_{f(x)} < \underbrace{ay+b}_{f(y)} \Rightarrow f(x) < f(y)$$

Ou seja, f é crescente.

Suponha agora $a<0$. Assim:

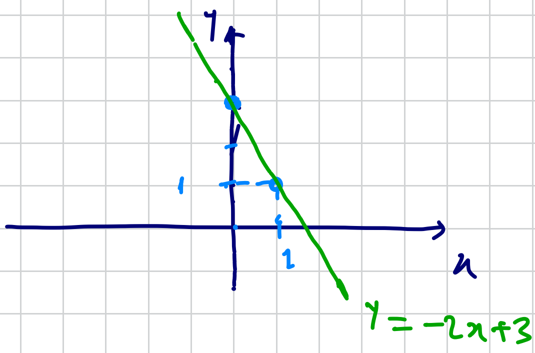
$$\underbrace{x<y}_{} \underset{\times a<0}{\Longrightarrow} ax>ay \underset{+b}{\Longrightarrow} \underbrace{ax+b}_{f(x)} > \underbrace{ay+b}_{f(y)} \Rightarrow f(x) > f(y)$$

Ou seja, f é decrescente. $\square$

Ex: $f(x) = -2x+3$ é decrescente pois $a=-2<0$

Esboço gráfico:

x	$y=-2x+3$
0	$-2\cdot(0)+3 = 3$
1	$-2\cdot(1)+3 = 1$



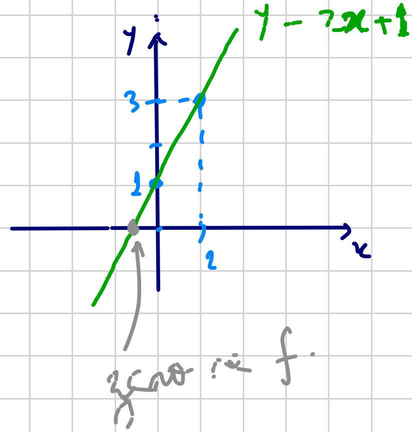
ZEROS DE UMA FUNÇÃO: Chamam-se zeros de uma função $f: A \to B$ os valores de $x \in A$ para os quais $f(x) = 0$. Geometricamente, um zero denota os interceptos com o eixo horizontal.

Ex.: $f(x) = 2x + 1$. Quais os zeros?

Solução: onde $f(x) = 0 \iff 2x + 1 = 0$

$$\iff 2x = -1 \iff x = -\frac{1}{2}$$

x	$y = 2x + 1$
0	$2 \cdot 0 + 1 = 1$
1	$2 \cdot 1 + 1 = 3$



FUNÇÃO POLINOMIAL DE SEGUNDO GRAU OU FUNÇÃO QUADRÁTICA:

É a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$.

Os zeros dessa função são os pontos $x \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = 0$. Ou seja, onde

$$ax^2 + bx + c = 0.$$ [EQUAÇÃO DE 2º GRAU]

os zeros serão dados por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ou seja, temos os pares ordenados

$$\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \underbrace{0}_{f(x)}\right) \quad e \quad \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \underbrace{0}_{f(x)}\right)$$

pertencentes ao gráfico de f.

Def.: Chama-se VÉRTICE da eq. de 2º grau o ponto $V(x_V, y_V)$, onde

x_V é o ponto médio dos zeros de f.

Ou seja,

$$x_V = \frac{\frac{-b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a}}{2} =$$

$$= \frac{\frac{-b + \cancel{\sqrt{b^2-4ac}} - b - \cancel{\sqrt{b^2-4ac}}}{2a}}{2}$$

$$= \frac{-\cancel{2}b}{\cancel{2}a} \times \frac{1}{2} = -\frac{b}{2a}$$

Ou seja, $\boxed{x_V = -\frac{b}{2a}}$

E $y_V = f(x_V) = a \cdot x_V^2 + b \cdot x_V + c$

$$= a \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right) + c$$

$$= \cancel{a}\cdot\frac{b^2}{4a^{\cancel{2}}} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$= \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a}$$

$$= \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = -\frac{\overbrace{b^2 - 4ac}^{\Delta}}{4a}$$

Denotando por $\Delta = b^2 - 4ac$, teremos

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

Resumindo: $V(x_v, y_v) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

O gráfico de uma função quadrática chama-se PARÁBOLA.

Ex: $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

Zeros: $f(x) = 0 \iff x^2 - 4x + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} ; \rightarrow \Delta = 4$$

$$x = \frac{4 \pm 2}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4+2}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ \text{ou} \\ x = \frac{4-2}{2} = \frac{2}{2} = 1. \end{cases}$$

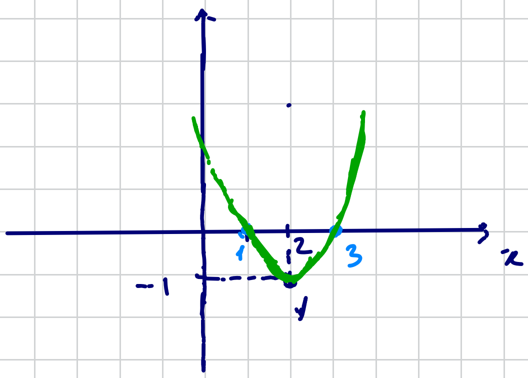
zeros: $x = 3$ e $x = 1$.

$V(x_V, y_V)$; onde:

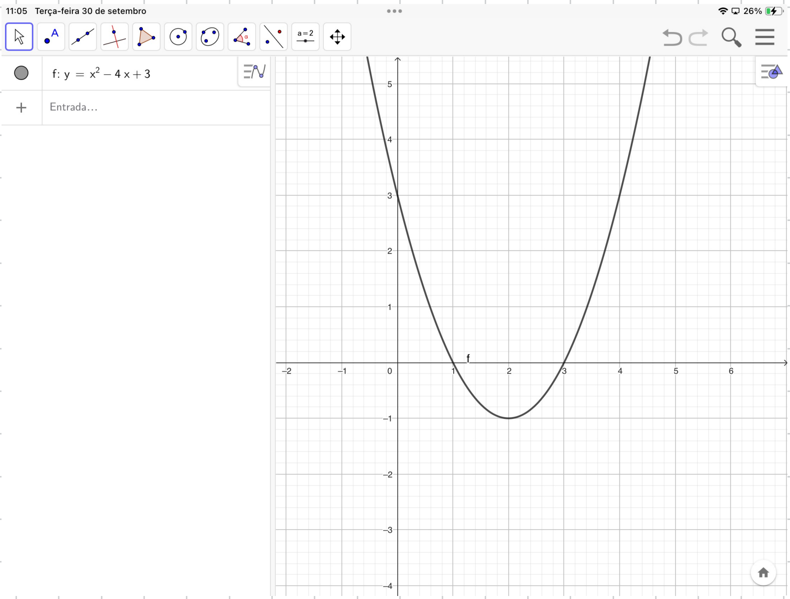
$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-4)}{2.(1)} = 2$$

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{4}{4 \cdot 1} = -1.$$

$$V(2, -1)$$



Obs.: Dado $f(x) = ax^2 + bx + c$; se $a > 0$ a parábola possuirá concavidade voltada para cima (C.P.C); e se $a < 0$, a concavidade fica voltada para baixo (C.P.B).



ESBOÇO GRÁFICO FEITO PELO GEOGEBRA.

EXERCÍCIO: Esboce o gráfico de $f(x) = x^2 - 7x + 10$, indicando domínio e imagem.

$ax^2 + bx + c$

SOLUÇÃO: zeros: onde $f(x) = 0$. $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad x^2 - 7x + 10 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = \dfrac{+7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2}$ $= \Delta$

$\Leftrightarrow \quad x = \dfrac{+7 \pm 3}{2}$

$x = \dfrac{+7 - 3}{2} = 2$

$x = \dfrac{+7 + 3}{2} = 5$

zeros: $x = 2$ e $x = 5$.

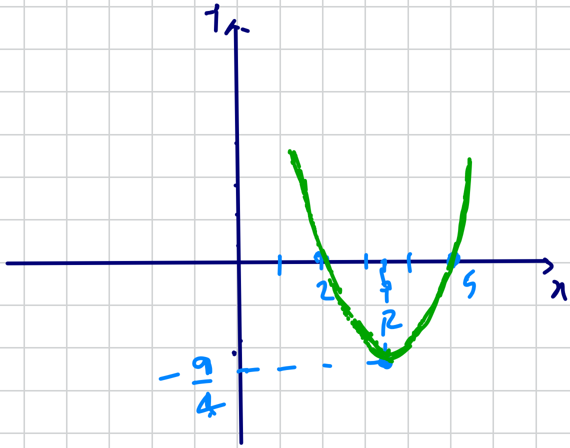
$V(x_V, y_V)$; onde:

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-7)}{2 \cdot 1} = \frac{7}{2}$$

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{9}{4 \cdot 1} = -\frac{9}{4}$$

$$V\left(\frac{7}{2}, -\frac{9}{4}\right)$$

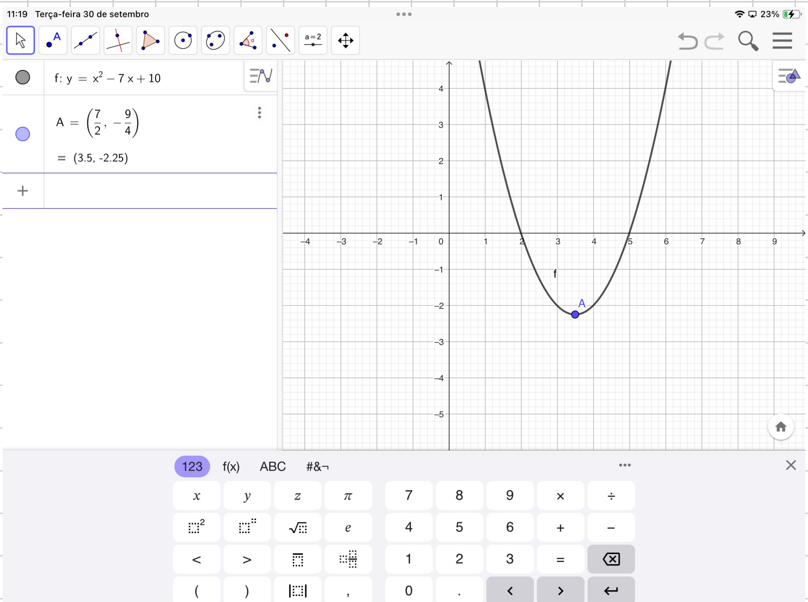
Esboço gráfico de f:



$D(f) = \mathbb{R}.$

$Im(f) = \left[-\frac{9}{4}, +\infty\right)$

ESBOÇO PELO GEOGEBRA.



FUNÇÃO MODULAR: A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ chama-se FUNÇÃO MODULAR.

O gráfico: $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$.

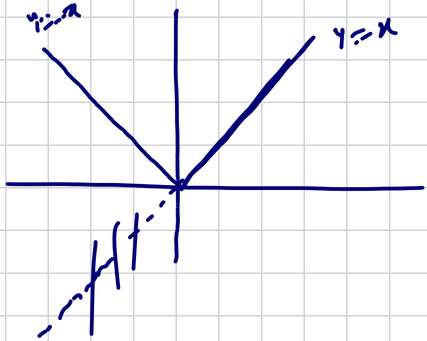
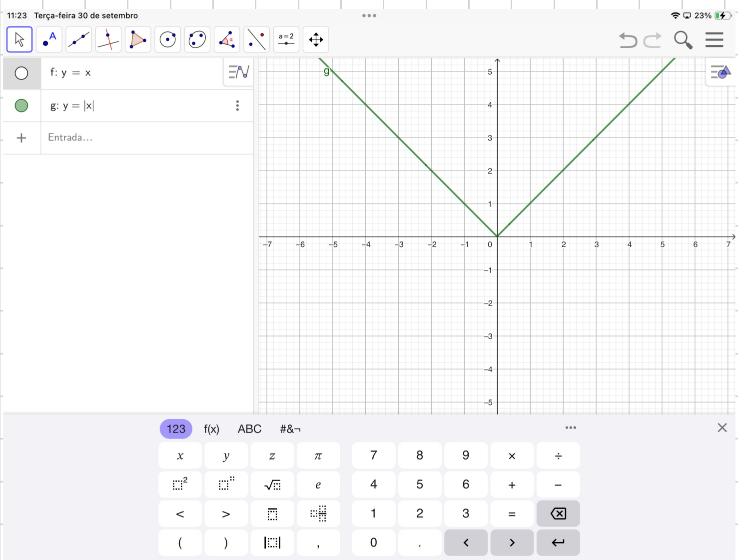
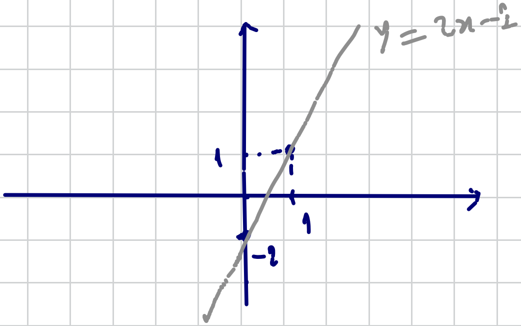


GRÁFICO DE $y=|x|$ pelo geogebra.



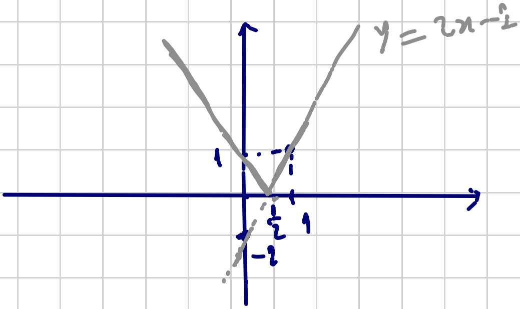
Ex-1 $y = |2x - 1|$.

A ideia consiste em fazer o gráfico de $y = 2x - 1$ e depois "passe o módulo".



x	$y = 2x - 1$
0	-1
1	1

passando o módulo, teremos:



Algebricamente, teremos:

$$f(x) = |2x - 1| = \begin{cases} 2x - 1, & \text{se } 2x - 1 \geq 0 \\ -(2x - 1), & \text{se } 2x - 1 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2x-1, & \text{si } 2x \geq 1 \\ -2x+1, & \text{si } 2x < 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2x-1, & \text{si } x \geq \frac{1}{2} \\ -2x+1, & \text{si } x < \frac{1}{2} \end{cases}.$$

2) $f(x) = |x^2 - x|$

1°: graphe de $y = x^2 - x$.

zéros: $x^2 - x = 0 \iff$

$x(x-1) = 0$

$\boxed{x = 0}$

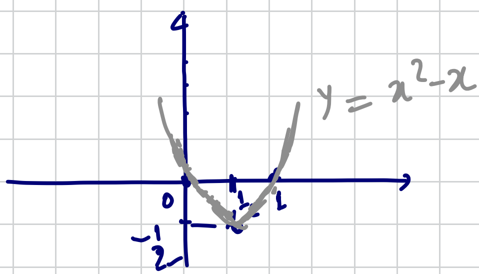
ou

$\boxed{x = 1}$

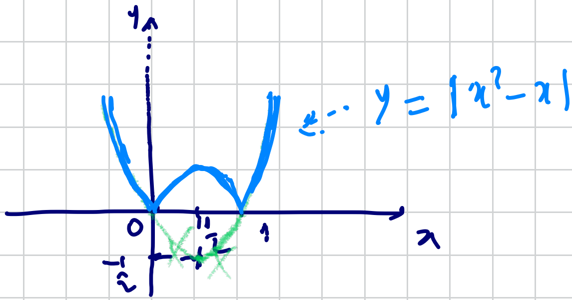
$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-1)}{2 \cdot 1} = +\frac{1}{2}$$

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = -\frac{1-0}{2} = -\frac{1}{2}$$

$V\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$



Tirando o módulo, teremos: $y = |x^2 - x|$:



ESBOÇO GRÁFICO PELO GEOGEBRA. $\longrightarrow$