ÁLGEBRA LINEAR I

25/09/25 – AULA 04

No final da aula passada iniciamos o estudo de sistemas lineares. Comentamos, ao final, que há várias formas de se resolver um sistema linear.

O mais conhecido é o método "por substituição"; ou seja, procura-se efetuar operações entre as equações, manipulando-as até obtermos uma equação com apenas uma variável. Depois, retrocede-se nas outras equações de modo a se determinar as demais variáveis.

Vejamos um exemplo:

Ex.:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x - y = 2 \longrightarrow x = 2 + y \end{cases}$$

$$2x + 3y = 4$$

$$2 \cdot (2 + y) + 3y = 4$$

$$4 + 2y + 3y = 4$$

$$5y = 0 \longrightarrow \boxed{y = 0}$$

$$x = 2 + y$$

$$x = 2 + 0$$

$$\boxed{x = 2}$$

$$S = \{(x,y)\} = \{(2,0)\}.$$

OPERAÇÕES ELEMENTARES SOBRE LINHAS:

Dado um sistema linear, as operações que podemos efetuar com as suas equações são as seguintes:

(i) substituir uma equação por um múltiplo dela;

(ii) trocar duas equações de lugar no sistema;

(iii) substituir uma equação por ela mesma mais um múltiplo de outra equação.

Estas operações transformam o sistema em outro sistema linear equivalente (ou seja, que possui a mesma solução do sistema original).

Vejamos um exemplo:

$$\left\{\begin{array}{l} x + 2y - 4z = -4 \\ 2x + 5y - 9z = -10 \\ 3x - 2y + 3z = 11 \end{array}\right.$$

(iii)

$$\begin{array}{r} x + 2y - 4z = -4 \\ + \quad 2x + 5y - 9z = -10 \\ \hline 3x + 7y - 13z = -14 \end{array}$$

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = -4 \\ 3x + 7y - 13z = -14 \\ 3x - 2y + 3z = 11 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 7y - 13z = -14 \\ 3x - 2y + 3z = 11 \end{array}\right\} -$$

$$+\begin{cases} \cancel{3x} + 7y - 13z = -14 \\ -\cancel{3x} + 2y - 3z = -11 \end{cases}$$

$$9y - 16z = -25$$

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = -4 \\ 3x + 7y - 13z = -14 \\ 9y - 16z = -25 \end{cases} \quad \times(-3), \ +$$

$$\begin{cases} -3x - 6y + 12z = 12 \\ 3x + 7y - 13z = -14 \\ 9y - 16z = -25 \end{cases} \quad +$$

$$\begin{cases} -3x - 6y + 12z = 12 & (\div -3) \\ y - z = -2 & \times(-9) \\ 9y - 16z = -25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = -4 \\ \cancel{9y} + 9z = 18 \\ +\cancel{9y} - 16z = -25 \end{cases} \quad +$$

$$-7z = -7 \Rightarrow \boxed{z = 1}$$

$$y - z = -2$$

$$y = -2 + z$$

$$y = -2 + 1 \Rightarrow \boxed{y = -1}$$

$$x + 2y - 4z = -4$$

$$x + 2\cdot(-1) - 4\cdot(1) = -4$$

$$x - 2 - \cancel{4} = \cancel{-4} \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

$$S = \{(x, y, z)\} = \{(2, -1, 1)\}.$$

O método acima não é difícil. Pode ser um pouco confuso nas manipulações algébricas e a notação. Felizmente ainda é possível "limpar" a resolução como segue:

Def.: Dado um sistema linear

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n = b_n \end{cases},$$

definimos a MATRIZ AUMENTADA do sistema como

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & & & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{array} \right)$$

Ex.: O sistema linear

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = -4 \\ 2x + 5y - 9z = -10 \\ 3x - 2y + 3z = 11 \end{cases}$$

possui a matriz aumentada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 2 & 5 & -9 & -10 \\ 3 & -2 & 3 & 11 \end{pmatrix}$$

Neste contexto matricial, as três operações elementares que efetuamos sobre as equações do sistema original tornam-se OPERAÇÕES ELEMENTARES SOBRE LINHAS NA MATRIZ AUMENTADA:

(i) substituir uma linha por um múltiplo dela mesma;

(ii) trocar duas linhas de lugar;

(iii) substituir uma linha por ela mesma mais um múltiplo de outra linha.

Denotando por l_i e l_j as linhas i e j, com $i \neq j$ e usando o símbolo $\hookrightarrow$ para significar substituição, podemos compactar as três operações elementares sobre linhas escrevendo:

(i) $l_i \hookrightarrow k \cdot l_i$ $(k \neq 0)$

(ii) $l_i \longleftrightarrow l_j$

(iii) $l_i \hookrightarrow l_i + k \cdot l_j$ $(k \neq 0)$

Voltando ao mesmo sistema feito anteriormente:

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = -4 \\ 2x + 5y - 9z = -10 \\ 3x - 2y + 3z = 11 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 2 & 5 & -9 & -10 \\ 3 & -2 & 3 & 11 \end{pmatrix}$$

Vamos aplicar operações elementares sobre linhas,

procurando deixá-la na forma escalonada reduzida por linhas.

Pivô

$$\begin{array}{cccc} & & & +8 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 2 & 5 & -9 & -10 \\ 3 & -2 & 3 & 11 \end{pmatrix} \quad l_2 \hookrightarrow l_2 - 2.l_1$$

$$\begin{array}{cccc} -3 & -6 & +12 & +12 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & 3 & 11 \end{pmatrix} \quad l_3 \hookrightarrow l_3 - 3l_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -8 & 15 & 23 \end{pmatrix} \quad l_3 \hookrightarrow l_3 + 8l_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \end{pmatrix} \quad l_3 \hookrightarrow \frac{1}{7} l_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad l_1 \hookrightarrow l_1 - 2.l_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad l_2 \hookrightarrow l_2 + l_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad l_1 \hookrightarrow l_1 + 2l_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 1 . \end{cases}$$

$$S = \{(2, -1, 1)\}.$$