

No final da aula passada apresentamos o conceito de equação exponencial, bem como um exemplo simples. No que segue, apresentaremos outros exemplos.

Resolver, em $\mathbb{R}$, cada equação a seguir:

$$(a) \quad 3^{2x-1} \cdot 9^{3x+4} = 27^{x+1}$$

$$\Leftrightarrow 3^{2x-1} \cdot (3^2)^{3x+4} = (3^3)^{x+1}$$

$$\Leftrightarrow 3^{2x-1} \cdot 3^{6x+8} = 3^{3x+3}$$

$$\Leftrightarrow 3^{\underline{2x-1} + \underline{6x+8}} = 3^{3x+3}$$

$$\Leftrightarrow 3^{\underline{8x+7}} = 3^{\underline{3x+3}}$$

$$\Leftrightarrow 8x+7 = 3x+3$$

$$\Leftrightarrow 8x - 3x = 3 - 7$$

$$5x = -4$$

$$x = -\frac{4}{5}$$

$$S = \left\{ -\frac{4}{5} \right\}$$

$$(b) \quad 9^x + 3^x - 12 = 0.$$

$$\Leftrightarrow (3^2)^x + 3^x - 12 = 0 \quad \Leftrightarrow 3^{2x} + 3^x - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow (3^x)^2 + 3^x - 12 = 0$$

Encre $\boxed{3^x = y}$. Assim, obtemos:

$$y^2 + y - 12 = 0$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2}$$

$$\underbrace{y = \frac{-1+7}{2} = 3}_{\text{ou}} \quad \underbrace{y = \frac{-1-7}{2} = -4}_{\text{ou}}$$

Assim, voltando à variável principal, temos encontros:

$$\bullet \quad y = 3: \quad 3^x = 3^1 \quad \Leftrightarrow \boxed{x = 1}$$

$$\bullet \quad y = -4: \quad \cancel{3^x = -4} \quad \text{Absurdo!}$$

Portanto, a solução da equação será

$$S = \{1\}.$$

$$(c) \sqrt{8^{x-1}} \cdot x+1 \sqrt[4]{2^{2x-3}} = 6 \sqrt[6]{2^{5x+3}}.$$

obs.1 corre'm lembrar que:

$$\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(2^3)^{x-1}} \cdot x+1 \sqrt{(2^2)^{2x-3}} = 6 \sqrt[6]{2^{5x+3}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[2]{2^{3x-3}} \cdot x+1 \sqrt[4]{2^{4x-6}} = 6 \sqrt[6]{2^{5x+3}}$$

$$\Leftrightarrow 2^{\frac{3x-3}{2}} \cdot 2^{\frac{4x-6}{x+1}} = 2^{\frac{5x+3}{6}}$$

$$\Leftrightarrow 2^{\frac{3x-3}{2} + \frac{4x-6}{x+1}} = 2^{\frac{5x+3}{6}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x-3}{2} + \frac{4x-6}{x+1} = \frac{5x+3}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(3x-3)(x+1) + 2(4x-6)}{2(x+1)} = \frac{5x+3}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x-1)(x+1) + 8x - 12}{2(x+1)} = \frac{5x+3}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x^2 - 3 + 8x - 12}{2(x+1)} = \frac{5x+3}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x^2 + 8x - 15}{2(x+1)} \neq \frac{5x+3}{6}$$

$$\cancel{6} \cdot (3x^2 + 8x - 15) = \cancel{2(x+1)} \cdot (5x+3) \quad (\div 2)$$

$$9x^2 + 24x - 45 = 5x^2 + 8x + 3$$

$$9x^2 - 5x^2 + 24x - 8x - 45 - 3 = 0$$

$$4x^2 + 16x - 48 = 0 \quad (\div 4)$$

$$x^2 + 4x - 12 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 48}}{2} = \frac{-4 \pm 8}{2}$$

$$\underbrace{x = \frac{-4+8}{2} = 2} \quad \text{ou} \quad \underbrace{x = \frac{-4-8}{2} = -6}$$

$$\underbrace{S = \{2, -6\}}$$

$$(d) \quad 3 \cdot 2^x - 5 \cdot 2^{x+1} + 5 \cdot 2^{x+3} - 2^{x+5} = 2.$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot \underbrace{2^x} - 5 \cdot \underbrace{2^x \cdot 2^1} + 5 \cdot \underbrace{2^x \cdot 2^3} - \underbrace{2^x \cdot 2^5} = 2$$

Então $\boxed{2^x = w}$. Assim:

$$3w - 10w + 40w - 32w = 2$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{w = 2}$$

Voltando à variável principal, temos ainda:

$$2^x = 2^1 \quad \Leftrightarrow \boxed{x = 1} \quad S = \{1\}.$$

$$(e) \quad 10^{2x-1} - 11 \cdot 10^{x-1} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 10^{2x} \cdot 10^{-1} - 11 \cdot 10^x \cdot 10^{-1} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (10^x)^2 \cdot \frac{1}{10} - 11 \cdot (10^x) \cdot \frac{1}{10} + 1 = 0$$

Écrire $10^x = w$. Ainsi, obtenons:

$$\frac{w^2}{10} - \frac{11}{10} w + 1 = 0 \quad (\times 10)$$

$$w^2 - 11w + 10 = 0$$

$$w = \frac{+11 \pm \sqrt{121 - 40}}{2} = \frac{11 \pm 9}{2}$$

$$\underbrace{w = \frac{11+9}{2}}_{\sim} = 10 \quad \text{ou} \quad \underbrace{w = \frac{11-9}{2}}_{\sim} = 1$$

Retournons pour la racine principale x , nous
 obtenons: $10^x = w.$

- $w = 10$: $10^x = 10^1 \Leftrightarrow \boxed{x = 1}$

- $w = 1$: $10^x = 1 = 10^0 \Leftrightarrow \boxed{x = 0}$

$$S = \{0, 1\}.$$

INEQUAÇÕES EXPONENCIAIS:

Def.: Chamamos inequação exponencial toda inequação que envolve variável no expoente.

Ex.: $3^{2x-1} < \frac{1}{9}$; $2^{x+1} \geq 1$

são inequações exponenciais.

O seguinte resultado estabelece a forma de resolver uma inequação exponencial.

PROPOSIÇÃO: Valem as seguintes propriedades:

(i) se $a > 1$, então:

$$a^{f(x)} \leq a^{g(x)} \Rightarrow f(x) \leq g(x)$$

[e analogamente para demais desigualdades]

(ii) se $0 < a < 1$, então:

$$a^{f(x)} \leq a^{g(x)} \Rightarrow f(x) \geq g(x),$$

i.e.; comparando-se os expoentes, a desigualdade muda de sentido [e analogamente para demais desigualdades].

DEMONSTRAÇÃO: Ignoraremos apenas o item (i);
ou seja, o caso quando $a > 1$.

Queremos resolver $a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$;

com $a > 1$.

Defina $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$h(x) = a^x \quad ; a > 1$$

Logo, h é uma função exponencial crescente.

Assim, se $f(x) < g(x)$ então, devemos ter

$$h(f(x)) < h(g(x)) \quad , \text{ ou seja:}$$

$$a^{f(x)} < a^{g(x)}$$

Isto é, acabamos de provar a implicação:

$$f(x) < g(x) \Rightarrow a^{f(x)} < a^{g(x)}$$

Então, por transposição^(*), segue que:

$$a^{f(x)} \geq a^{g(x)} \Rightarrow f(x) \geq g(x) \quad (a > 1)$$

(*) $P \Rightarrow Q$. TRANSPOSIÇÃO: $\neg Q \Rightarrow \neg P$.

Vejaamos alguns exemplos:

Ex.: Resolver cada inequação a seguir:

$$(a) \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} \geq \frac{1}{9}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^2 \Rightarrow x+1 \leq 2$$

$$0 < a = \frac{1}{3} < 1$$

$$\Rightarrow \boxed{x \leq +1}$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 1\} = (-\infty, 1].$$

$$(b) \quad 4^{x^2+1} \leq 32^{1-x}$$

$$\Leftrightarrow (2^2)^{x^2+1} \leq (2^5)^{1-x}$$

$$\Leftrightarrow 2^{2x^2+2} \leq 2^{5-5x} \Rightarrow 2x^2+2 \leq 5-5x$$

$$a = 2 > 1$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2 - 5 + 5x \leq 0$$

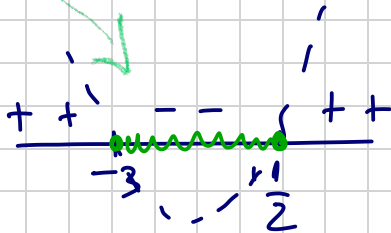
$$\Leftrightarrow 2x^2 + 5x - 3 \leq 0$$

on résolve, que analyser nous:

$$2x^2 + 5x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm 7}{4} \quad \begin{array}{l} \nearrow x = \frac{1}{2} \\ \searrow \text{ou} \\ x = -3 \end{array}$$



$$S = \left[-3, \frac{1}{2}\right]$$

No que segue, vamos apresentar uma interessante aplicação:

EXERCÍCIO: A taxa de crescimento de uma população de um determinado país é de aproximadamente 3% ao ano. Se a taxa continuar a mesma, em quantos anos a população desse país irá dobrar?

SOLUÇÃO: Seja $q(t)$ a quantidade da população no instante de tempo t , expressa em anos. Suponha que a população inicial seja q_0 . Assim:

$$t=0 \Rightarrow q = q_0$$

$$t=1 \Rightarrow q = q_0 + \frac{3}{100} q_0 = q_0 \left(1 + \frac{3}{100}\right)$$

$$t=2 \Rightarrow q = q_0 \left(1 + \frac{3}{100}\right) + \frac{3}{100} \cdot q_0 \left(1 + \frac{3}{100}\right)$$

$$= q_0 \left(1 + \frac{3}{100}\right) \cdot \left[1 + \frac{3}{100}\right]$$

$$= q_0 \cdot \left(1 + \frac{3}{100}\right)^2$$

$$t=3 = \underbrace{q_0 \left(1 + \frac{3}{100}\right)^2} + \frac{3}{100} \cdot \underbrace{q_0 \left(1 + \frac{3}{100}\right)^2}$$

$$= q_0 \left(1 + \frac{3}{100}\right)^2 \cdot \left[1 + \frac{3}{100}\right]$$

$$= q_0 \left(1 + \frac{3}{100}\right)^3$$

⋮

$$t=k = q_0 \left(1 + \frac{3}{100}\right)^k = q_0 \cdot \left(\frac{100+3}{100}\right)^k$$

$$\Rightarrow \underline{t=k} \Rightarrow q(t) = q_0 \cdot \left(\frac{103}{100}\right)^{\overset{t}{k}}$$

Da eq, obtemos: $(11 = t)$

$$q(t) = q_0 \cdot \left(\frac{103}{100}\right)^t$$

Qual o valor de t para que $q(t) = 2 \cdot q_0$?

$$2 \cdot q_0 = q(t) = q_0 \cdot \left(\frac{103}{100}\right)^t$$

$$\Rightarrow \cancel{2} \cancel{q_0} = \cancel{q_0} \cdot \left(\frac{103}{100}\right)^t$$

$$2 = \left(\frac{103}{100}\right)^t,$$

uma equação exponencial. Porém, não é possível obter uma igualdade de mesma base. Como resolver?

Isto só pode ser concluído com auxílio de logaritmos; nosso próximo ponto de estudo.

LOGARITMOS:

Inicialmente os logaritmos foram criados para resolver cálculos envolvendo números muito grandes.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	...

$$64 \times 32 = ? \quad 2048$$

Observando o esquema acima, note que, ao invés de multiplicar números, somam-se números, e o resultado da soma dá a posição do resultado do produto que deveria ser feito.

O que se tem aqui é a ideia latente da seguinte propriedade:

$$\log(a \cdot b) = \log a + \log b.$$

As divisões eram substituídas por subtrações.

Isso inspirou a definição de logaritmo:

Def.: Dados $a > 0$ e $b > 0, b \neq 1$, chama-se logaritmo de a na base b , e escrevemos $\log_b a$, ao expoente $c \in \mathbb{R}$ ao qual se deve elevar a base b de modo a se obter $a > 0$.

Simbolicamente:

$$\log_b a = c \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} b^c = a$$

NOTAÇÃO
EXPONENCIAL.

Ex.: • $2^3 = 8$. Então, tem-se: $\log_2 8 = 3$

• $3^{-2} = \frac{1}{9}$. Então tem-se: $\log_3 \frac{1}{9} = -2$

• $4^0 = 1$. Então, tem-se: $\log_4 1 = 0$

PROPOSIÇÃO: (PROPRIEDADES DOS LOGARITMOS)

Valem as seguintes propriedades:

$$01) \log_b 1 = 0$$

$$02) \log_b b = 1$$

$$03) \log_b b^m = m$$

$$04) a^{\log_a b} = b.$$

$$05) \log_b (x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$$

$$06) \log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$$

$$07) \log_b a^m = m \cdot \log_b a$$

$$08) \log_b A = \log_b B \iff A = B$$

Obs: As propriedades 05, 06 e 07 são chamadas de PROPRIEDADES OPERATÓRIAS DOS LOGARITMOS.

DEMONSTRAÇÃO:

01) $\log_b 1 = 0:$

De fato, encontre $\log_b 1 = x \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} b^x = 1 = b^0$
 $\Leftrightarrow \boxed{x=0}$

Portanto, $\log_b 1 = x = 0.$

02) $\log_b b = 1:$

Encontre $\log_b b = x \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} b^x = b^1 \Leftrightarrow \boxed{x=1}$

03) $\log_b b^m = m:$

Encontre $\log_b b^m = x \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} b^x = b^m \Leftrightarrow \boxed{x=m}$

$$04) a^{\log_a b} = b :$$

$$\text{Esseus } \log_a b = x \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \underline{a^x = b}.$$

$$\text{Assum: } a^{\log_a b} = \underline{\underline{a^x}} = b.$$

$$05) \log_b (x \cdot y) = \log_b x + \log_b y :$$

$$\text{Esseus } \log_b (x \cdot y) = \alpha$$

$$\log_b x = \beta$$

$$\log_b y = \gamma$$

$$\text{Vamos mostrar que } \alpha = \beta + \gamma.$$

$$\bullet \log_b (x \cdot y) = \alpha \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} b^\alpha = x \cdot y \quad (\checkmark)$$

$$\bullet \log_b x = \beta \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} b^\beta = x$$

(*)

$$\bullet \log_b y = \gamma \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} b^\gamma = y$$

(**)

Demando (*) e (**) para (*), obtenemos:

$$\underline{b^\alpha} = xy = b^\beta \cdot b^\gamma = \underline{b^{\beta+\gamma}} \Leftrightarrow \alpha = \beta + \gamma$$

$$\alpha = \beta + \gamma$$

"

$$\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y.$$

□

Análogamente probarse en demando propiedades.

□

