FUNÇÕES TRANSCENDENTAIS

17/09/25 - AULA 01

PROF. MAURÍCIO ZAHN

wp.ufpel.edu.br/zahn (página da disciplina)

PROVAS:

PROVA 1:	12/11/25
PROVA 2:	18/02/26
PROVA 3:	25/02/26
EXAME:	04/03/26

Nesta disciplina estudaremos as funções exponencial, logarítmica e as funções trigonométricas diretas e inversas.

FUNÇÕES EXPONENCIAIS:

Def.: Chama-se função exponencial a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = a^x$, onde $a > 0$ e $a \neq 1$.

E por quê devemos ter $a>0$ e $a \neq 1$?

Note que,

- se $a=0$, teríamos $f(x)=0^x$; e então, tem-se que:

$$0^x = \begin{cases} 0, \text{ se } x>0 \\ \text{indeterminado}, \text{ se } x=0 \\ \nexists, \text{ se } x<0. \end{cases}$$

[Por quê 0^0 é indeterminado?

$$0^0 = 0^{1-1} = 0^1 \div 0^1 = \frac{0^1}{0^1} = \frac{0}{0}$$]

- se $a<0$; então $f(x)=a^x$ pode não ter sentido em $\mathbb{R}$, dependendo do valor $x \in \mathbb{R}$ tomado. Por exemplo, tome $a=-\frac{1}{2}<0$, ou seja, considere a "função" $f(x)=\left(-\frac{1}{2}\right)^x$, $x \in \mathbb{R}$. Em particular, seja $x=\frac{3}{4}$.

Então:

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{\left(-\frac{1}{2}\right)^3} = \sqrt[4]{-\frac{1}{8}} \notin \mathbb{R}$$

Logo, já temos que $a>0$.

Resta verificar que devemos ter $a \neq 1$.

De fato, se tomarmos $a=1$, teríamos:

$$f(x) = 1^x = 1,$$

que é uma função constante, e não exponencial.

<u>Conclusão:</u> $f(x) = a^x$; $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; com $a>0$ e $a \neq 1$.

<u>PROPOSIÇÃO:</u> Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$.

Então:

(i) se $a>1$, a função é crescente.

(ii) $0<a<1$, a função é decrescente.

<u>DEMONSTRAÇÃO:</u>

(i) Suponha $a>1$. Vamos mostrar que $f(x) = a^x$ é uma função crescente.

Ou seja, dados $x, y \in \mathbb{R}$, com $x<y$,

precisamos mostrar que $f(x) < f(y)$

Como $x < y$, então, $\exists\, m > 0$ tal que

$$x + m = y.$$

Por absurdo, suponha que $f(x) \geq f(y)$; ou seja,

$a^x \geq a^y$. Mas, como $x + m = y$; $m > 0$;

então:

$$a^x \geq a^y = a^{x+m}$$

$$a^x \geq a^{x+m}$$

$$\Rightarrow a^x \geq a^x \cdot a^m$$

$$\Rightarrow a^x - a^x \cdot a^m \geq 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{a^x}_{>0}(1 - a^m) \geq 0.$$

Como $a^x > 0$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$ [veja em (*)],

segue que $1 - a^m \geq 0$

$\Rightarrow 1 \geq a^m$; ou seja; temos

$a^m \leq 1$, com $a > 1$ e $m > 0$;

isso é um absurdo!

Logo, $f(x) < f(y)$, sempre que $x < y$;

ou seja, $f(x) = a^x$, com $a > 1$, é crescente.

[*]: Justifiquemos que $a^x > 0$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$

De fato, temos $a > 1$. Logo:

- se $x > 0$; $a^x > 0$
- se $x = 0$, $a^x = a^0 = 1 > 0$
- se $x < 0$, então $-x > 0$. Assim:

$$a^{-x} > 0 \iff \frac{1}{a^x} > 0$$

$$\iff a^x > 0$$

Isso conclui a prova do item (i).

(ii) Suponha $0 < a < 1$. A mostrar: $f(x) = a^x$ é decrescente.

Seja $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por:

$$g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x \quad ; \qquad 0 < a < 1.$$

Logo, $\frac{1}{a} > 1$.

Então, pelo item (1) segue que $g(x)$ é crescente. Ou seja:

$$x < y \Rightarrow g(x) < g(y) \Rightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^x < \left(\frac{1}{a}\right)^y$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\underbrace{a^x}_{>0}} < \frac{1}{\underbrace{a^y}_{>0}} \Rightarrow 1 \cdot a^y < 1 \cdot a^x$$

$$\Rightarrow \underbrace{a^y}_{= f(y)} < \underbrace{a^x}_{= f(x)} \Rightarrow f(y) < f(x)$$

$\Rightarrow x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$; ou seja, $f(x) = a^x$, com $0 < a < 1$ é decrescente.

$\square$

Obs.: Usaremos nesta disciplina os símbolos matemáticos clássicos:

- $\forall$: PARA TODO, ou QUALQUER.

  Ex.: para qualquer x pertencente aos reais: $\forall x \in \mathbb{R}$

  O símbolo $\forall$ chama-se QUANTIFICADOR UNIVERSAL

- $\exists$: EXISTE ; chamado de QUANTIFICADOR EXISTENCIAL.

  Ex.: existe x pertencente aos reais: $\exists x \in \mathbb{R}$

- $\Rightarrow$: se ..., então. símbolo de condicional.

  Ex.: $\overbrace{\text{se está chovendo}}^{P}$, então $\overbrace{\text{a grama de sua fica molhada}}^{Q}$.

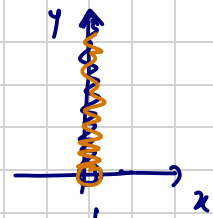
  $P \Rightarrow Q$.

- $\Leftrightarrow$: se, e somente se. Símbolo de bicondicional

GRÁFICO DA EXPONENCIAL: Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$,

Considere, primeiramente o caso $a > 1$, ou seja, a exponencial crescente.

Note que $y = f(x) = a^x > 0$



Logo, tem-se que $Im(f) = (0, +\infty)$

Como $y > 0$; a reta $y = 0$ é chamada de ASSÍNTOTA da exponencial (ela separa o plano cartesiano em duas regiões: onde tem gráfico e onde não tem gráfico)

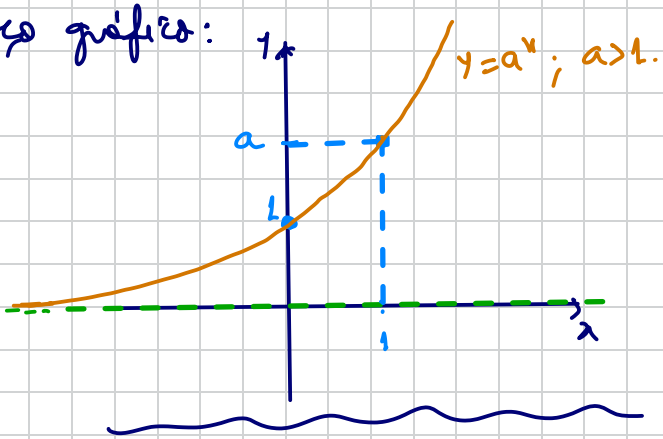
Um valor básico é $f(0) = a^0 = 1$.

Ou seja, o ponto $P(0, 1)$ pertence ao gráfico da f.

Como $a > 1$, $f(1) = a^1 = a > 1$,

e, tem-se o ponto $Q(1, a)$ no gráfico da exponencial. Construímos, assim, o seguinte

esboço gráfico:



$y = 0$: ASSÍNTOTA HORIZONTAL

Considere agora $f(x) = a^x$, com $0 < a < 1$, ou seja, a função exponencial decrescente.

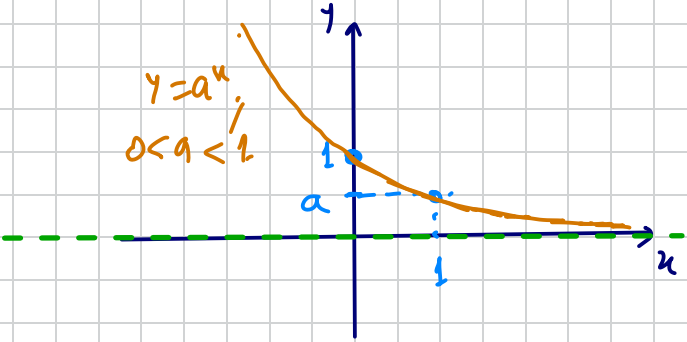
Ainda tem-se $a^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$; ou seja, $y = a^x > 0$; o que mostra que $Im(f) = (0, +\infty)$

Então a reta $y = 0$ é a assíntota horizontal

Tomemos dois pontos quaisquer sobre o gráfico:

x	$y = a^x$
0	$a^0 = 1$
1	$a^1 = a < 1$.

Esboço gráfico:



Vejamos exemplos:

Esboçar o gráfico de cada função a seguir, indicando domínio e imagem:

01) $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$.

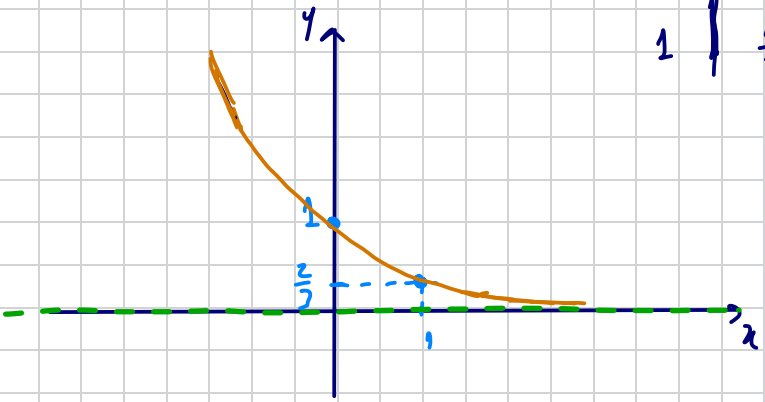
$0 < a = \frac{2}{3} < 1$

$y = \left(\frac{2}{3}\right)^x > 0$. Logo, $Im(f) = (0, +\infty)$

ASSÍNTOTA HORIZONTAL: $y = 0$ (eixo x)

Esboço gráfico:

x	$y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$
0	1
1	$\frac{2}{3} < 1$



$D(f) = \mathbb{R}$.

2) $f(x) = 1 + 2^{x-1}$

<u>SOLUÇÃO</u>: Escreva: $y = 1 + 2^{x-1}$

$$y - 1 = \underbrace{2^{x-1}}_{>0}$$

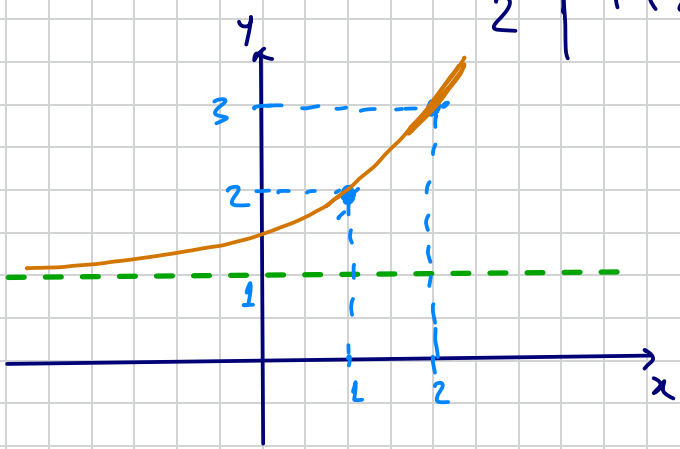
$$\Rightarrow y - 1 > 0 \Rightarrow y > 1.$$

$$Im(f) = (1, +\infty)$$

ASSÍNTOTA HORIZONTAL: $y = 1$.

Esboço gráfico:

x	$y = 1 + 2^{x-1}$
1	$1 + 2^0 = 2$
2	$1 + 2^1 = 3$



03) $y = 2 - 3 \cdot \underbrace{2^{2x-1}}_{>0}$

$a^x > 0$

$\Rightarrow y - 2 = -3 \cdot 2^{2x-1} \quad (\cdot(-1))$

$\Rightarrow -y + 2 = 3 \cdot 2^{2x-1} \quad (\div 3)$

$\Rightarrow \dfrac{2-y}{3} = \underbrace{2^{2x-1}}_{>0} \Rightarrow \dfrac{2-y}{3} > 0 \Rightarrow 2 - y > 0$

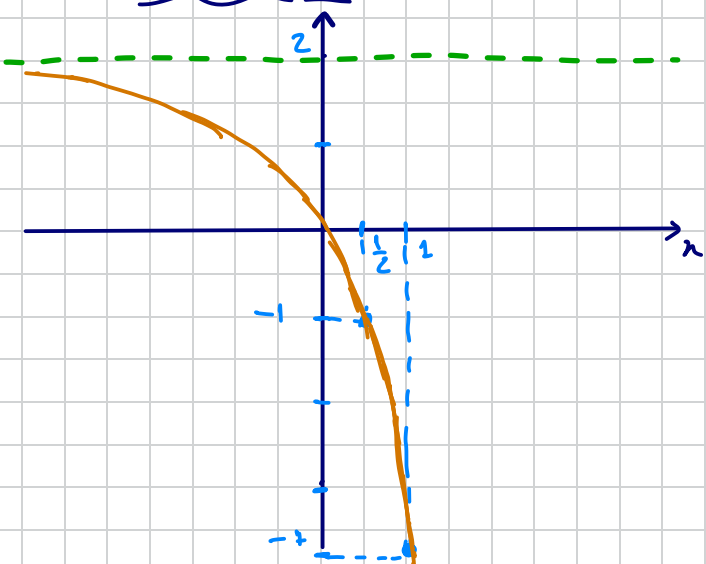
$\Rightarrow 2 > y \Rightarrow y < 2$

$Im(f) = (-\infty, 2)$

ASSÍNTOTA HORIZONTAL: $\underline{\underline{y = 2}}$

Esboço gráfico:

x	$y = 2 - 3 \cdot 2^{2x-1}$
$\frac{1}{2}$	$2 - 3 \cdot 2^0 = -1$
1	$2 - 3 \cdot 2 = -4$



$D(f) = \mathbb{R}$.

04) $y = -1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}$.

$y + 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x} > 0$. $\Rightarrow y + 1 > 0$

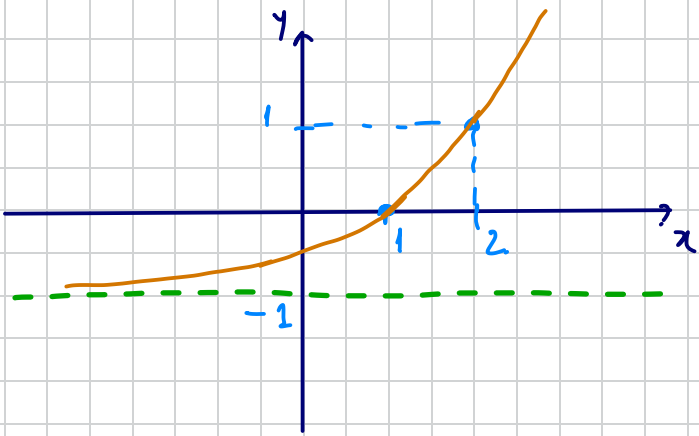
$\Rightarrow y > -1$.

$Im(f) = (-1, +\infty)$

ASSÍNTOTA HORIZONTAL: $y = -1$.

esboço gráfico:

x	$y = -1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}$
1	$-1 + 1 = 0$
2	$-1 + 2 = 1$.



$D(f) = \mathbb{R}$.

EQUAÇÃO EXPONENCIAL:

Chama-se equação exponencial toda equação cuja variável configura-se no expoente.

O caso mais básico é do tipo $a^x = b$.

A ideia para resolver esse tipo de problema é procurar obter uma igualdade de mesma base, pois neste caso os expoentes deverão ser iguais:

Ex: $2^{1-3x} = \frac{1}{8}$.

Solução: $2^{1-3x} = \frac{1}{2^3} = 2^{-3}$

$$\Rightarrow 2^{1-3x} = 2^{-3} \Leftrightarrow 1-3x = -3 \Leftrightarrow -3x = -3-1$$

$$\Leftrightarrow -3x = -4 \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{4}{3}}$$

$$S = \left\{ \frac{4}{3} \right\}.$$