CÁLCULO 1A

23/09/25 - AULA 03

No final da aula passada iniciamos o estudo sobre módulos.

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

Observamos que, $\forall x \in \mathbb{R}$; $-|x| \leq x \leq |x|$

No que segue, vamos apresentar algumas propriedades.

PROPOSIÇÃO: Dado $a > 0$, vale a equivalência:

$$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a.$$

DEMONSTRAÇÃO: De fato, basta notar que:

$$|x| \leq a \iff \max\{x, -x\} \leq a \iff$$

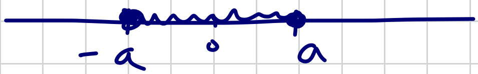
$$\iff x \leq a \text{ e } \underbrace{-x \leq a}_{(x-1)}.$$

$$\iff x \leq a \text{ e } x \geq -a.$$

$$\iff \quad -a \le x \le a$$

$\square$

SIGNIFICADO GEOMÉTRICO PARA $|x| \le a$:



dentro tem-se $|x| \le a$.

COROLÁRIO: $|x-b| \le a \iff -a \le x-b \le a$

SOMANDO b, vem:

$$-a+b \le x-\cancel{b}+\cancel{b} \le a+b$$

$$a-b \le x \le a+b.$$

EX.: Quais os valores de x para os quais $|x-3| \le 1$. ?

SOLUÇÃO:

$$|x-3| \leq 1 \iff$$

$$-1 \leq x-3 \leq 1$$

Somando 3 em toda a cadeia de desigualdades, vem:

$$-1+3 \leq x \cancel{-3} \cancel{+3} \leq 1+3$$

$$2 \leq x \leq 4.$$

<u>Solução</u>: $x \in [2, 4]$.

02) Resolver a inequação: $|2x-5| \leq 4$.

<u>Solução</u>:

$$-4 \leq 2x-5 \leq 4 \qquad +5$$

$$\iff -4+5 \leq 2x \cancel{-5} \cancel{+5} \leq 4+5$$

$$\iff 1 \leq 2x \leq 9 \qquad (\div 2)$$

$$\iff \frac{1}{2} \leq \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} \leq \frac{9}{2}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{9}{2}$$

$$S = \left[\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right].$$

03) $|1-3x| \leq 2$:

$$-2 \leq 1-3x \leq 2 \quad (-1)$$

$$-2-1 \leq \cancel{1}-3x-\cancel{1} \leq 2-1$$

$$-3 \leq -3x \leq 1 \quad \times(-1)$$

$$3 \geq 3x \geq -1$$

$$-1 \leq 3x \leq 3 \quad (\div 3)$$

$$-\frac{1}{3} \leq \frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} \leq \frac{\cancel{3}}{\cancel{3}}$$

$$-\frac{1}{3} \leq x \leq 1. \qquad S = \left[-\frac{1}{3}, 1\right].$$

PROPOSIÇÃO: $|x| \geq a \iff x \geq a$ ou $x \leq -a$.

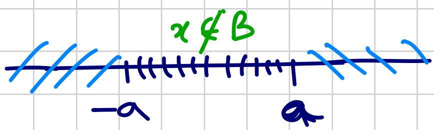
DEMONSTR.: Defina o conjunto

$$B = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq a\}.$$ Então, temos que:

$$B^c = \{x \in \mathbb{R} : |x| < a\}.$$ Disso, temos que

$$x \in B^c \iff |x| < a. \iff -a < x < a.$$

Então, $x \notin B \iff -a < x < a.$



$\Rightarrow x \in B \iff x \geq a$ ou $x \leq -a$.

Conclusão: $|x| \geq a \iff x \geq a$ ou $x \leq -a$.

$\blacksquare$

Ex 1: Resolver as inequações:

(a) $|x-2| \geq 2$.

solução:

$$|x-1| \geq 2 \iff \underbrace{x-1 \geq 2}_{} \quad \text{ou} \quad \underbrace{x-1 \leq -2}_{}$$

$$x - 1 \geq 2 \quad (+1)$$

$$x \cancel{-1} \cancel{+1} \geq 2 + 1$$

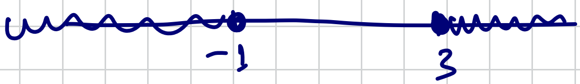
$$x \geq 3$$

$$x - 1 \leq -2 \quad (+1)$$

$$x \cancel{-1} \cancel{+1} \leq -2 + 1$$

$$x \leq -1.$$

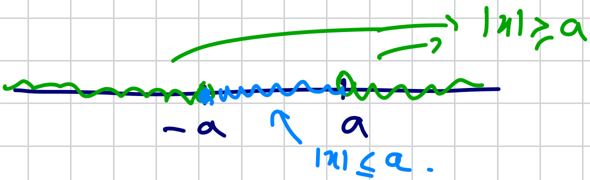
solução: $x \geq 3$ ou $x \leq -1$.



$$S = (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$$

Obs.: São dois resultados a observar:

- $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$
- $|x| \geq a \iff x \geq a$ ou $x \leq -a$



OUTRAS INEQUAÇÕES QUE NÃO ENVOLVAM MÓDULO:

Resolver cada inequação abaixo:

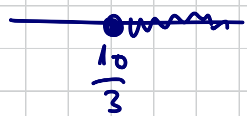
(a) $2x + 3 \leq 5x - 7$

$2x - 5x \leq -7 - 3$

$-3x \leq -10 \qquad \times(-1)$

$3x \geq 10 \qquad (\div 3)$

$x \geq \frac{10}{3}$



$S = \left[\frac{10}{3}, +\infty\right)$.

(b) $\frac{2x+3}{x-1} < 1$.

Obs.: É tentador querer multiplicar em cruz, como se faria se fosse uma igualdade. Porém, temos desigualdade, e se algum dos fatores for negativo (não sabemos sem resolver), então a desigualdade deveria virar.

Qual a solução? Comparar com o zero. Do seguinte modo:

$$\frac{2x+3}{x-1} < 1 \Leftrightarrow \frac{2x+3}{x-1} - \frac{1}{1} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x+3-(x-1)}{x-1} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x+3-x+1}{x-1} < 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{\frac{x+4}{x-1} < 0}}.$$

Agora precisamos estudar os sinais do numerador e do denominador. (isso para efetuar, depois, uma divisão de sinais e tomar a parte onde resulta $\underline{\underline{< 0}}$)

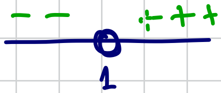
- SINAIS DO NUMERADOR:

$$x+4=0 \Leftrightarrow x=-4.$$

$$- \; - \;\; \underset{-4}{|} \;\; + \; + \quad \begin{cases} \forall x < -4 \Rightarrow x+4 < 0 \\ \forall x > -4 \Rightarrow x+4 > 0 \end{cases}$$

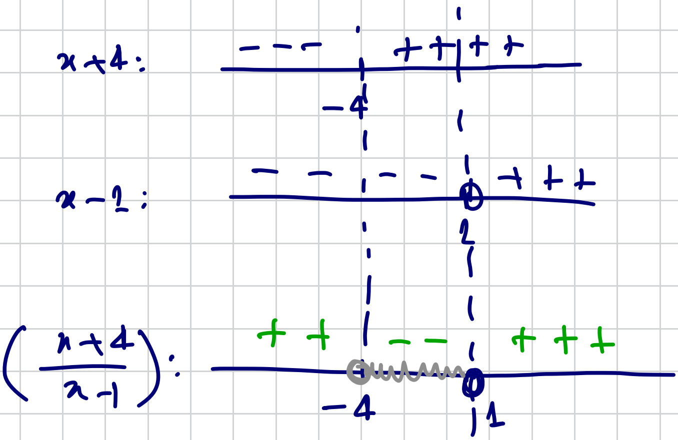
• SINAIS DO DENOMINADOR ($\neq 0$)

$$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$



$$\begin{cases} \forall x < 1 \Rightarrow x - 1 < 0 \\ \forall x > 1 \Rightarrow x - 1 > 0 \end{cases}$$

Efetuando divisão de sinais, vem:



$$S = (-4, 1).$$

(c) $\dfrac{1}{x+2} \geq \dfrac{x-1}{2x+1}$

Solução:

$$\frac{1}{x+2} \geq \frac{x+1}{2x+1} \Leftrightarrow \frac{1}{x+2} - \frac{x+1}{2x+1} \geq 0$$

$$\frac{2x+1-(x+2)(x+1)}{(x+2)(2x+1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x+1-(x^2+x+2x+2)}{(x+2)\cdot(2x+1)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x+1-x^2-3x-2}{(x+2)(2x+1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2-x-1}{(x+2)(2x+1)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-(x^2+x+1)}{(x+2)(2x+1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+x+1}{(x+2)(2x+1)} \leq 0$$

$(x-1)$

• SINAL DO NUMERADOR:

$$x^2+x+1=0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \notin \mathbb{R}.$$

Logo, $\nexists$ raízes reais. Então, x^2+x+1 sempre é positivo ou sempre é negativo.

Note que, x^2+x+1, para $x=0$ tem-se

$$0^2+0+1 = 1 > 0.$$

Então, o numerador é sempre positivo.

$$\underline{+ \; + \; + \; + \; + \; +}$$

• <u>SINAL DO DENOMINADOR:</u> $(\neq 0)$

$$(x+2)(2x+1) = 0 \iff \begin{cases} x+2=0 \\ \text{ou} \\ 2x+1=0 \end{cases}$$

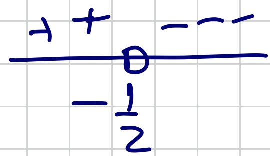
$$\iff x=-2 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{1}{2}$$

Analisemos o sinal de cada parte:

• $x+2$:

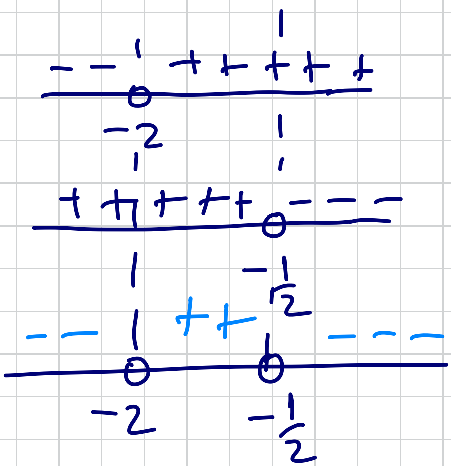
$$\underset{-2}{\underline{- \; - \; \circ \; + \; +}} \qquad \begin{cases} \forall x > -2 \Rightarrow x+2>0 \\ \forall x < -2 \Rightarrow x+2<0 \end{cases}$$

• $2x+1$:



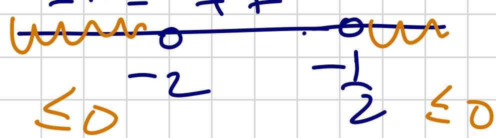
$$\begin{cases} \forall x > -\frac{1}{2} \Rightarrow 2x > -1 \Rightarrow 2x+1>0 \\ \forall x < -\frac{1}{2} \Rightarrow 2x < -1 \Rightarrow 2x+1<0 \end{cases}$$

Como o denominador é o <u>produto entre dois fatores</u>, multipliquemos os dois estudos de sinal:



[SINAL DO DENOM.]

Como o numerador é sempre positivo; concluímos:



$$\Rightarrow S = (-\infty, -2) \cup \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right).$$

(d) $$\left| \frac{2x+1}{2x-1} \right| \le \frac{1}{2}.$$

Solução: Eliminando a notação de módulo, vem:

(II)

$$-\frac{1}{2} \le \frac{2x+1}{2x-1} \le \frac{1}{2}$$

(I)

(I): $$\frac{2x+1}{2x-1} \le \frac{1}{2} \iff \frac{2x+1}{2x-1} - \frac{1}{2} \le 0$$

$$\iff \frac{2(2x+1) - (2x-1)}{2(2x-1)} \le 0$$

$$\iff \frac{4x + 2 - 2x + 1}{2(2x-1)} \le 0 \iff \boxed{\frac{2x+3}{2(2x-1)} \le 0}$$

• SINAL DO NUMERADOR: $2x+3 = 0 \iff x = -\frac{3}{2}$

$$\begin{array}{c} - - - \;\; | \;\; + + + \\ -\frac{3}{2} \end{array} \quad \begin{cases} \forall x < -\frac{3}{2} \;\; (\times 2) \Rightarrow 2x < -3 \Rightarrow 2x+3 < 0 \\ \forall x > -\frac{3}{2} \;\; (\times 2) \Rightarrow 2x > -3 \Rightarrow 2x+3 > 0 \end{cases}$$

• SINAL DO DENOMINADOR $(\neq 0)$

$$2(2x+1)=0 \iff 2x+1=0 \iff x=-\frac{1}{2}$$

x		$-\frac{1}{2}$	
	$- \; -$	0	$+ \; + \; +$

$$\forall x < -\frac{1}{2} \xRightarrow{\times 2} 2x < -1 \Rightarrow 2(2x+1) < 0$$

$$\forall x > -\frac{1}{2} \xRightarrow{\times 2} 2x > -1 \Rightarrow 2x+1>0 \xRightarrow{\times 2} 2(2x+1)>0$$

		$-\frac{3}{2}$		$-\frac{1}{2}$	
NUM.	$- \; - \; -$		$+ \; +$		$+ \; + \; +$
DENOM.:	$- \; - \; -$		$-$	0	$+ \; + \; +$
QUOCIENTE:	$+ \; + \; +$	$\bullet$	$- \; -$	$\circ$	$+ \; + \; +$

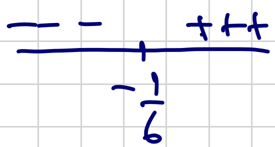
S_1

$$(\text{II}): \; -\frac{1}{2} \leq \frac{2x+1}{2x-1} \iff \frac{2x+1}{2x-1}+\frac{1}{2} \geq 0$$

$$\iff \frac{2(2x+1)+2x-1}{2(2x-1)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x+2+2x-1}{2(2x-1)} \geq 0 \Leftrightarrow \boxed{\frac{6x+1}{2(2x-1)} \geq 0}$$

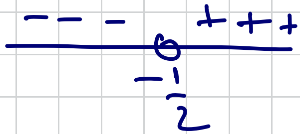
• <u>SINAL DO NUMERADOR:</u> $6x+1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{6}$



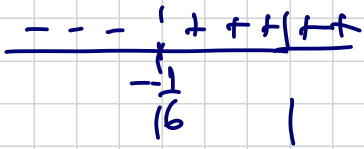
$\forall x < -\frac{1}{6} \xRightarrow{\times 6} 6x < -1 \Rightarrow 6x+1 < 0$

$\forall x > -\frac{1}{6} \xRightarrow{\times 6} 6x > -1 \Rightarrow 6x+1 > 0$

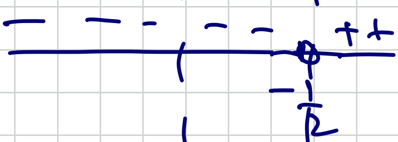
• <u>SINAL DO DENOM.:</u> É o mesmo do caso I.



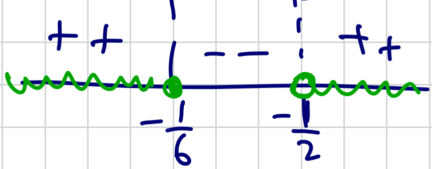
NUM.:



DENOM.:



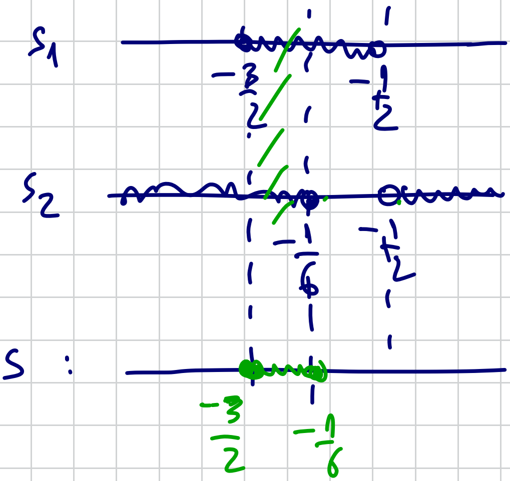
QUOC.:



S_2.

A solução final será dada por:

$$S = S_1 \cap S_2 \text{ , onde:}$$



$$S = \left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{6}\right].$$