CÁLCULO 1A . T2. 16/09/25 - AULA 01

PROF. MAURÍCIO ZAHN.

wp.ufpel.edu.br/zahn (página da disciplina)

Nesta disciplina estudaremos números reais e suas propriedades, funções, limites, continuidade, derivabilidade e integrabilidade, de funções de uma variável real.

CONJUNTOS NUMÉRICOS:

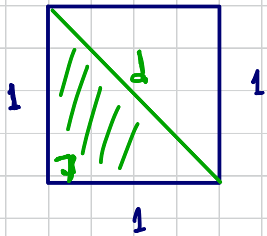
Nosso objetivo é estudar o conj. $\mathbb{R}$ dos números reais. Consideremos conhecidos os seguintes conjuntos:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ - conj. dos números naturais.

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ - conjunto dos números inteiros. ($\mathbb{Z}$ provém do alemão ZAHL.)

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$ é o conjunto dos números racionais.

O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é insuficiente no sentido de que, por exemplo, ao traçar a diagonal d de um quadrado de lado 1, teremos:



Nosso universo em questão é o conjunto $\mathbb{Q}$.

Pelo teorema de Pitágoras, a medida d da diagonal, será dada por:

$$d^2 = (1)^2 + (1)^2$$

$$d^2 = 1+1$$

$$d^2 = 2$$

Pergunta: qual é o número racional, cujo quadrado seria igual a 2?

Ou seja: $d^2 = 2 \iff d = \sqrt{2}$.

Porém, $\sqrt{2}$ não é racional!

Como mostrar isso?

Por absurdo, suponha que $\sqrt{2}$ seja racional, então existem $p, q \in \mathbb{N}$, tais que $mdc(p,q) = 1$. (isso para termos a fração irredutível para $\frac{p}{q}$, ou seja, simplificada ao máximo), e

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}.$$

Elevando ao quadrado, obtemos:

$$(\cancel{\sqrt{2}})^{\cancel{2}} = \left(\frac{p}{q}\right)^2$$

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \underset{\times q^2}{\Longrightarrow} \boxed{p^2 = 2q^2}$$

Logo, p^2 é par. Então p é par

Logo, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\boxed{p = 2.m}$ $(*)$

Assim:

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \iff 2 = \frac{(2m)^2}{q^2}$$

$$2 = \frac{4m^2}{q^2} \quad (\div 2)$$

$$1 = \frac{2m^2}{q^2} \Rightarrow q^2 = 2m^2$$

Logo, q^2 é par. Então, q é par. Disso, segue que $\exists\, l \in \mathbb{N}$ tal que $\boxed{q = 2.l}$ (**)

Ou seja, concluímos que

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} = \frac{2m}{2l}.$$

por (*) e (**)

Então, $mdc(p,q) \geq 2$,

um absurdo, pois $mdc(p,q) = 1$.

Ou seja, $\sqrt{2}$ não é um número racional.

Este número é chamado de <u>IRRACIONAL</u>.

Para resolver esse tipo de problema constitui-se o conj. $\mathbb{R}$ dos números reais, que é o completamento dos racionais.

Na verdade, o conj. $\mathbb{R}$ dos números reais pode ser construído a partir dos números racionais, usando a ideia de sequência (aproximação).

Por exemplo:

$$\sqrt{2} = 1 + \sqrt{2} - 1 = 1 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1}}$$

$$= 1 + \frac{1}{\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}}} = 1 + \frac{1}{\frac{1+\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2 - (1)^2}} =$$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$$= 1 + \frac{1}{\frac{1+\sqrt{2}}{1}} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{1+\sqrt{2}} = 1 + \cfrac{1}{1 + 1 + \cfrac{1}{1 + 1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}}$$

(REPRESENTAÇÃO EM FRAÇÃO CONTÍNUA PARA $\sqrt{2}$)

Como essa representação em fração contínua é infinita, segue que $\sqrt{2}$ não é racional.

(se fosse finita seria racional)

Assim, usando aproximações por TRUNCAMENTO (abandonando partes da soma), vamos obter uma sequência de números racionais $r_1, r_2, \ldots, r_n$ que, converge para $\sqrt{2}$

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}}$$

r_1 r_2 r_3 r_4 ⋱

Ou seja:

- $r_1 = 1$
- $r_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$
- $r_3 = 1 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{2}} = 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5} = 1{,}4$
- $r_4 = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{2}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \frac{2}{5}} = 1 + \frac{5}{12} = \frac{17}{12} =$

  $= 1{,}41666\ldots$

- etc...

[ESTA APROXIMAÇÃO PARA $\sqrt{2}$ AINDA É "GROSSEIRA", MAS PERCEBEMOS QUE CONVERGE PARA $\sqrt{2}$]

Ou seja, à medida em que avançamos na lista infinita $(r_1, r_2, r_3, r_4, \ldots)$; vamos nos aproximando cada vez mais para o valor $\sqrt{2}$., i.e.; temos que $\sqrt{2}$ é obtido a partir de uma sequência de números racionais.

Ou seja, um número real, que completa os racionais é, obtido a partir de uma sequência infinita de números racionais, através de um processo de limite.

Isto ajuda a definir o <u>corpo</u> $\mathbb{R}$ dos números reais como segue:

<u>Def.:</u> Chama-se corpo dos números reais o conj: $\mathbb{R}$ (conforme discutido acima, ou seja, como completamento do conj. $\mathbb{Q}$ dos racionais), munido de uma adição

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto x + y \quad ;$$

e um produto

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto x \cdot y \quad ,$$

tal que cumpre as seguintes propriedades:

para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$, tem-se:

A_1: $(x+y)+z = x+(y+z)$ (associatividade)

A_2: $x+y = y+x$ (comutatividade)

A_3: $\exists\, 0 \in \mathbb{R}$ tal que $x+0 = x$ (existência do neutro aditivo)

existe.

A_4: $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists\, y \in \mathbb{R}$ tal que $x+y = 0$

para todo

(i.e., todo elemento possui um simétrico aditivo)

Neste caso, denotamos y por $-x$. Daí:

$$x + (-x) = 0$$

M_1: $x.(y.z) = (x.y).z$ (associatividade)

M_2: $x.y = y.x$ (comutatividade)

M_3: $\exists\, 1 \in \mathbb{R}$ tal que $x.1 = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$
(existência do neutro multiplicativo)

$\underline{M_4}$. $\forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\exists\, y \in \mathbb{R}$ tal que $x \cdot y = 1$.

(todo elemento não nulo possui um inverso multiplicativo, e o mesmo é denotado por $y = \frac{1}{x}$ ou $y = x^{-1}$)

$$x \cdot y = x \cdot x^{-1} = x^{1+(-1)} = x^0 = 1.$$

$\underline{D}$: $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$ (distributividade)

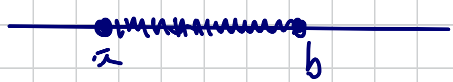
Todas essas propriedades tornam o conj. $\mathbb{R}$ dos números reais, um corpo.

$\underline{\text{Def}}$: $\mathbb{R}$ é ordenado, ou seja, dados $x, y \in \mathbb{R}$, dizemos que $x < y$ se $\exists\, m > 0$ tal que $x + m = y$

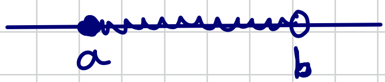
No corpo $\mathbb{R}$ dos números reais tem-se a noção de intervalo, como segue:

$\underline{\text{Def}}$: Definimos os intervalos:

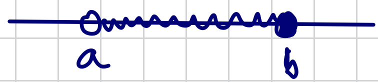
- $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$.



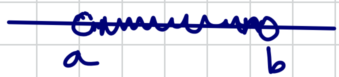
- $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$



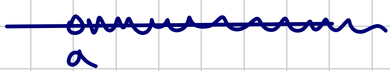
- $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$



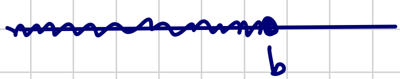
- $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$



- $(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$ – intervalo ilimitado à direita.



- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$ - intervalo ilimitado à esquerda.



- $(-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$.