

PRODUTO DE MATRIZES:

Def.: Dadas duas matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{n \times p}$, definiremos o produto $A \cdot B$ como sendo uma matriz $C = (c_{ij})_{m \times p}$, tal que

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

Analogamente, note que, por exemplo:

$$\bullet \quad c_{11} = \sum_{k=1}^n a_{1k} \cdot b_{k1} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} + \dots + a_{1n} \cdot b_{n1}$$

$$\bullet \quad c_{12} = \sum_{k=1}^n a_{1k} \cdot b_{k2} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32} + \dots + a_{1n} \cdot b_{n2}$$

• et cetera.

Expandindo a notação matricial das matrizes envolvidas, temos obter:

$$C = A \cdot B$$

$m \times p$ $m \times m$ $m \times p$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & \dots & c_{mp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mp} \end{pmatrix}$$

Ou seja, o elemento c_{ij} da matriz C resulta da soma entre os produtos dos elementos da linha i de A com a coluna j de B .

Lembre que o produto entre A e B existe desde que o número de colunas da primeira matriz igual ao número de linhas da segunda matriz, para produzir o produto

entre linhas e colunas.

$$\underset{\substack{m \times n \quad n \times p}}{A \cdot B} = \underset{m \times p}{C}$$

Note que em geral, tem-se $A \cdot B \neq B \cdot A$, ou seja, o produto matricial não comuta.

De fato, pode acontecer que o produto $A \cdot B$ exista, mas $B \cdot A$ não tem sentido.

Ex:

$$\underset{2 \times 3}{A} \cdot \underset{3 \times 5}{B} = \underset{2 \times 5}{C} ;$$

no entanto;

$$\underset{3 \times 5}{B} \cdot \underset{2 \times 3}{A} \text{ não existe, pois } \neq$$

número de linhas de B é diferente do número de colunas de A.

Ex:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

$$\underline{A \cdot B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 0 + 0 \cdot (-1) & 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 0 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot 4 + (-2) \cdot (1) + 0 \\ 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) & 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 & 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -4 & 10 \end{pmatrix}}}$$

PROPOSIÇÃO: (PROPRIEDADES ARITMÉTICAS DAS MATRIZES)

Sejam A, B e C matrizes. Então, vale as seguintes propriedades onde, cada operação tenha sentido. Então, vale as seguintes propriedades:

$$(i) \quad A + (B + C) = (A + B) + C \quad (\text{ASSOCIATIVIDADE})$$

$$(ii) \quad A + B = B + A \quad (\text{COMUTATIVIDADE})$$

$$(iii) \quad \exists 0 \text{ tal que } A + 0 = A \quad (0 \text{ é a matriz nula})$$

$$(iv) \quad \text{para qualquer matriz } A, \text{ existe uma matriz } W \text{ tal que } A + W = 0$$

[no caso $W := -A$]

$$(v) \quad A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \quad (\text{DISTRIBUTIVIDADE})$$

$$(vi) \quad A \cdot I = A \quad (I \text{ é o elemento multiplicativo}).$$

[observe que se $A_{m \times m}$, então $I_{m \times m}$]

$$(N.ii) \quad A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C \quad (\text{ASSOCIATIVIDADE})$$

DEMONSTRAÇÃO: Provaremos (i), (ii) e (iii)

$$(i) \quad A + (B + C) = (A + B) + C.$$

$$\text{Sejam } A = (a_{ij})_{m \times m}; B = (b_{ij})_{m \times m} \text{ e } C = (c_{ij})_{m \times m}$$

$$\text{Escreva } S = B + C, \text{ onde}$$

$$s_{ij} = b_{ij} + c_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Assim, temos:

$$A + (B + C) = A + S := T, \text{ onde}$$

$$t_{ij} = a_{ij} + s_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Por outro lado; (i.e., considerando $(A+B)+C$),

temos $A+B=W$, onde

$$w_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \in \mathbb{R}$$

Assim:

$$(A+B)+C = W+C := V, \text{ onde}$$

$$v_{ij} = w_{ij} + c_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Agora, note que:

$$\underline{t_{ij}} = a_{ij} + s_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) =$$

$$= (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = w_{ij} + c_{ij} = \underline{v_{ij}}$$

Em REAIS VALE
A ASSOCIATIVIDADE

Então, mostramos que $t_{ij} = v_{ij}$, $\forall i, j$.

Logo, $V = T$.

$$\begin{array}{ccc} & \text{"/} & \text{"} \\ & W+C & A+B \\ & \text{"/} & \text{"} \\ (A+B)+C & = & A+(B+C) \end{array} \quad .$$

i.e., $(A+B)+C = A+(B+C)$; provando (i).

(iv) $A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$:

Sejam $A = (a_{ij})_{m \times n}$;

$B = (b_{ij})_{n \times p}$ e $C = (c_{ij})_{n \times p}$

Então $B+C = W$, onde

$$\underline{w_{ij}} = b_{ij} + c_{ij}.$$

Agora;

$$A \cdot (B+C) = A \cdot \underbrace{W}_{n \times p} = D_{m \times p},$$

onde
$$d_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} \cdot w_{kj} \quad \text{Assim}$$

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} \cdot \underbrace{w_{kj}}_{b_{kj} + c_{kj}} = \sum_{k=1}^m a_{ik} \cdot (b_{kj} + c_{kj}) =$$

$$= \sum_{k=1}^m (a_{ik} \cdot b_{kj} + a_{ik} \cdot c_{kj}) = \sum_{k=1}^m a_{ik} \cdot b_{kj} + \sum_{k=1}^m a_{ik} \cdot c_{kj}$$

EM III VALE A
DISTRIBUTIVIDADE

PROPRIEDADE DOS
SOMÁRIOS

Considerando agora a matriz $A \cdot B + A \cdot C$,

temos:

$$\underbrace{A \cdot B}_{m \times n \times p} = T_{m \times p} \quad \text{e} \quad \underbrace{A \cdot C}_{m \times n \times p} = U_{m \times p}$$

onde

$$t_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj} \quad \text{e} \quad u_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot c_{kj}$$

Assim, obtemos que:

$$d_{ij} = \underbrace{\sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}}_{t_{ij}} + \underbrace{\sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot c_{kj}}_{u_{ij}} = t_{ij} + u_{ij}, \quad \forall i, \forall j$$

Logo;

$$D = T + U$$

$$\begin{matrix} \parallel & \parallel \\ A \cdot W & A \cdot B + A \cdot C \\ \parallel & \\ A \cdot (B + C) & \parallel \end{matrix}$$

$$\Rightarrow A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C; \text{ prova da (iv).}$$

(vi) $A \cdot I = A$:

Sejam $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $I = (\delta_{ij})_{m \times n}$.

Seja $C = A \cdot I$. Vamos mostrar que $C = A$.

Então; temos:

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot \delta_{kj} = \\ &= \underbrace{a_{i1} \cdot \delta_{1j}}_{=0} + a_{i2} \cdot \delta_{2j} + \underbrace{a_{i3} \cdot \delta_{3j}}_{=0} + \dots + \underbrace{a_{ij} \cdot \delta_{jj}}_{=1} + \dots + \underbrace{a_{in} \cdot \delta_{nj}}_{=0} = \\ &= a_{ij} \cdot 1 = \underbrace{a_{ij}}_{=0}, \forall i, \forall j. \end{aligned}$$

Outro seja, acabamos de mostrar que $A = C$,
mostrando que $A \cdot I = A$.

MATRIZES TRANSPOSTAS:

Def: Seja $A = (a_{ij})_{m \times n}$ uma matriz. Definimos
a matriz transposta de A , e denotamos por A^t ,
a matriz $A^t = (a_{ji})_{n \times m} = (a_{ij}^t)_{n \times m}$.

Outro seja, a matriz transposta troca linhas
por colunas.

Ex: $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 8 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$.

Então,

$$A^t = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 5 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}_{3 \times 2}.$$

PROPOSIÇÃO: Valorem as seguintes propriedades de transporte:

$$(i) (A^t)^t = A \quad (\text{independência da transposição})$$

$$(ii) (k \cdot A)^t = k \cdot A^t, \quad k \in \mathbb{R}.$$

$$(iii) (A+B)^t = A^t + B^t$$

$$(iv) (A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$$

