ÁLGEBRA LINEAR I

30/09/25 - AULA 05

Def.: Dizemos que uma matriz quadrada A_n é **elementar** quando ela provém de uma única operação elementar sobre linhas da identidade I_n

Ex.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ é uma matriz elementar pois dada

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$; fazendo:

$\ell_2 \hookrightarrow \ell_2 - 1.\ell_1$. sobre I_3 vamos obter A.

PROPOSIÇÃO 1: Seja A_n uma matriz quadrada qualquer e I_n uma matriz identidade. Seja E_n uma matriz elementar (obtida por uma única operação elementar sobre linhas em I_n) Então, efetuar essa mesma operação elementar sobre linhas em A_n equivale a multiplicar A_n à esquerda pela matriz elementar E_n.

A demonstração desse resultado não é difícil, mas é muito longa. Por essa razão, vamos omiti-la.

Faremos um exemplo para ilustrar.

Ex.:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 0 \\ 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad l_2 \hookrightarrow l_2 - 2 \cdot l_3$$

$$\Downarrow$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Assim, temos:

$$E \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 0 \\ 7 & 9 & 8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 3 & 5 \\ -15 & -16 & -16 \\ 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

Por outro lado, dada

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 0 \\ 7 & 9 & 8 \end{pmatrix} \qquad \ell_2 \hookrightarrow \ell_2 - 2\ell_3$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 3 & 5 \\ -15 & -16 & -16 \\ 7 & 9 & 8 \end{pmatrix} = E.A$$

OPERAÇÕES ELEMENTARES INVERSAS:

Como vimos anteriormente, uma matriz elementar E é aquela que provém da matriz identidade, através de uma <u>ÚNICA</u> operação elementar sobre linhas na I_n.

É interessante observar que, podemos aplicar sobre a matriz elementar E uma outra operação elementar que transforme E na identidade novamente. Tal operação elementar que "restaura" a identidade, chama-se uma <u>operação elementar inversa</u>.

<u>Ex.:</u>

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \ell_2 \hookrightarrow \ell_2 - \ell_1 .$$

$$\Rightarrow E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \ell_2 \hookrightarrow \ell_2 + \ell_1$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

De acordo com a proposição anterior, chamando de $\tilde{E}$ a matriz elementar que produz a ação $\ell_2 \hookrightarrow \ell_2 + \ell_1$ sobre I_3, tem-se:

$$\tilde{E}.(E.I) = I$$

Tem-se a seguinte "tabela":

OP. ELEMENTAR	OP. ELEMENTAR INVERSA
$l_i \leftrightarrow l_j$	$l_i \leftrightarrow l_j$
$l_i \hookrightarrow k.l_i$	$l_i \hookrightarrow \frac{1}{k} l_i$
$l_i \hookrightarrow l_i + k l_j$	$l_i \hookrightarrow l_2 - k.l_j$

PROPOSIÇÃO 2: Uma matriz elementar é invertível, e a sua inversa também é uma matriz elementar.

DEMONSTR.: Seja E uma matriz elementar qualquer. Seja $\tilde{E}$ a matriz elementar que é obtida pela operação elementar inversa à aquela que produziu E. Então, pelos resultados anteriores segue que

$$\tilde{E} . E = I_n \, ; \quad e \quad E . \tilde{E} = I_n$$

Portanto, E é invertível, e a sua inversa é $\tilde{E}$.

Isso prova a proposição.

$\square$

Todos estes resultados nos conduzem ao seguinte resultado importante:

TEOREMA: Seja A_n uma matriz quadrada de ordem n. São equivalentes as seguintes afirmações:

(i) A forma escalonada reduzida por linhas de A_n é a I_n.

(ii) A_n pode ser decomposta em um produto de matrizes elementares.

(iii) A_n é inversível.

DEMONSTR.:

(i) $\Rightarrow$ (ii) Suponha que a forma escalonada reduzida por linhas de A seja I_n. Então, existe uma sequência de operações elementares sobre linhas $e_1, e_2, \dots, e_k$ agindo sobre A_n que a reduzem à identidade.

Como cada op. elementar sobre linhas e_j corresponde à uma matriz elementar E_j, pela PROPOSIÇÃO 1, segue que:

$$E_k \cdots E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 A = I \qquad (*)$$

Como pela proposição 2, cada matriz elementar é inversível, seja E_j^{-1} a inversa de E_j; $j \in \{1, 2, \dots, k\}$.

Multiplicando $(*)$ à esquerda pelas E_j^{-1}, ordenadamente, vamos obter:

$$E_1^{-1} \cdots E_{k-1}^{-1} \underbrace{\left(E_k^{-1} E_k\right)}_{I} \cdots E_3 E_2 \cdot E_1 A = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdots E_{k-1}^{-1} E_k^{-1} \cdot I$$

$$I$$

$$I$$

$$\Rightarrow \quad I \cdot A = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} \cdot I$$

$$\Rightarrow \quad A = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdots E_k^{-1},$$

ou seja, A é um produto de matrizes elementares; o que prova (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Suponha que A_n é decomposta em um produto de matrizes elementares. Vamos mostrar que A é inversível. Sejam $E_1, E_2, \ldots, E_k$ matrizes elementares tais que

$$A_n = E_1 . E_2 . \cdots E_k .$$

Pela proposição 2, cada matriz elementar é inversível; e como o produto de matrizes inversíveis resulta em uma matriz inversível, segue que

$$E_1 . E_2 \ldots E_k \text{ é inversível,}$$

ou seja, A é inversível. Isso prova (iii)

(iii) $\Rightarrow$ (i) Suponha que A_n seja inversível.

A mostrar: a forma escalonada reduzida por linhas de A_n é I_n.

Como A_n é inversível, segue que, $\exists$ B tal que $AB = I_n$ e $B.A = I_n$.

Seja M a forma escalonada reduzida por linhas da matriz A. Ou seja, existem $e_1, e_2, \ldots, e_k$ operações elementares sobre linhas que reduzem A_n à M. Assim, sejam $E_1, E_2, \ldots, E_k$ as matrizes elementares correspondentes. Então:

$$E_k \ldots E_2 \cdot E_1 A = M;$$

porém M é quadrada, e como A é inversível e E_j são inversíveis, $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$; segue que M deverá ser inversível. Então, M não pode possuir uma linha inteiramente nula. Como M é inversível e quadrada, segue que $M = I$. (pois se M tiver uma linha nula, então $A \cdot M \neq I$ e $M \cdot A \neq I$, ou seja, A não seria inversível).

$\square$

Este resultado é "poderoso" no sentido de que ele nos fornece um importante algoritmo para obtenção da inversa de uma matriz (quadrada).

Basta considerar o seguinte:

Considere A_n matriz quadrada.

$$A \rightsquigarrow e_1 \rightsquigarrow e_2 \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow e_k \Rightarrow I_n$$

Então

$$I_n \rightsquigarrow e_1 \rightsquigarrow e_2 \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow e_k \Rightarrow A^{-1}$$

Em geral tomamos a matriz aumentada:

$$(A \,\vdots\, I) \overset{e_1}{\rightsquigarrow} \overset{e_2}{\rightsquigarrow} \cdots \overset{e_k}{\rightsquigarrow} (I \,\vdots\, A^{-1})$$

Isto porque:

$$E_k \cdots E_2 E_1 \cdot A = I$$

$$(E_k \cdots E_2 E_1 A)^{-1} = (I)^{-1} = I$$

$$A^{-1} \cdot E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} = I$$

$$A^{-1} \cdot \underbrace{E_1^{-1} \cdots E_k^{-1} E_k \cdots E_1}_{I} = E_k \cdots E_1 \, I$$

$$A^{-1} = E_k \cdots E_2 \cdot E_1 \cdot I$$

Ou seja, basta efetuar a mesma sequência de operações elementares sobre linhas em I, na mesma ordem, para obter A^{-1}! Por isso faz-se mesma matriz com dois grandes blocos:

$$(A \mid I) \overset{e_1}{\rightsquigarrow} \overset{e_2}{\rightsquigarrow} \cdots \overset{e_k}{\rightsquigarrow} (I \mid A^{-1})$$

__Ex.:__ $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. $A^{-1} = ?$

Solução:

$$(A \,\vdots\, I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{l_1 \leftrightarrow l_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{l_2 \leftarrow l_2 - 2 \cdot l_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{l_2 \leftrightarrow l_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{l_2 \leftarrow \frac{1}{2} l_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & -3 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{l_3 \leftarrow l_3 - 2 l_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{l_3 \hookrightarrow -\frac{1}{3} l_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & +\frac{2}{3} & +\frac{1}{3} \end{array}\right) \xrightarrow{l_1 \hookrightarrow l_1 + l_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \xrightarrow{l_1 \hookrightarrow l_1 - 2 l_3}$$

-2

$+\frac{2}{3}$ $\quad -\frac{4}{3}$ $\quad -\frac{2}{3}$

$-\frac{4}{3} + 1 = -\frac{1}{3}$

$-\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{-4+3}{6} = -\frac{1}{6}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$\underbrace{}_{I} \qquad \underbrace{}_{A^{-1}}$$

$$\Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$