ÁLGEBRA LINEAR I:

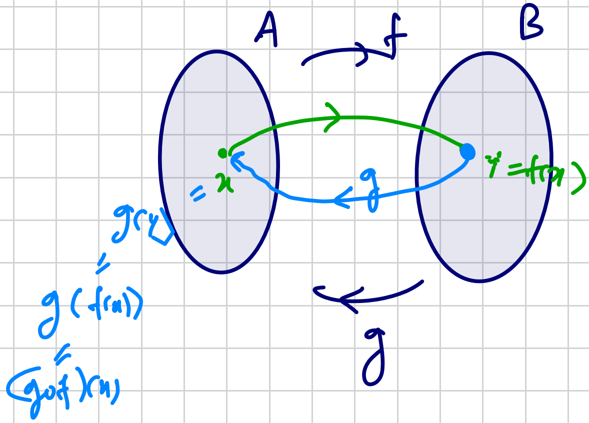
23/09/25 - AULA 03

MATRIZES INVERSÍVEIS:

Do estudo de funções, dizemos que uma função $f: A \to B$ é inversível se $\exists\, g: B \to A$ tal que

$$(g \circ f)(x) = x \quad e \quad (f \circ g)(y) = y,$$

$\forall x \in A$ e $\forall y \in B$.



Ou seja, escreve-se:

$$(g \circ f)(x) = x = id_A(x)$$

e

$$(f \circ g)(y) = y = id_B(y)$$

Nosso objetivo é traduzir esta ideia para o universo das matrizes. Neste caso, as funções serão matrizes, a composição será o produto entre matrizes e a função identidade será substituída pela matriz identidade.

Ou seja, teremos o seguinte conceito:

Def.: Dizemos que uma matriz quadrada A é inversível se, e somente se, existir uma matriz quadrada B tal que

$$A \cdot B = I_n \quad e \quad B \cdot A = I_n .$$

Neste caso, dizemos que B é a inversa de A, e escrevemos $B = A^{-1}$.

No que segue, vamos apresentar algumas propriedades da inversa.

PROPOSIÇÃO: A inversa de uma matriz, se existir, é única.

DEMONSTR.: Sejam B e C duas inversas para uma matriz inversível A.

Vamos mostrar que $B = C$.

De fato, como B e C são inversas de A, então:

$$B \cdot A = I \quad \text{e} \quad A \cdot B = I \;;$$

$$C \cdot A = I \quad \text{e} \quad A \cdot C = I$$

Disso:

$$B \underset{\substack{\text{pois } I \text{ é} \\ \text{o neutro} \\ \text{multiplicativo}}}{=} B \cdot I \underset{\text{hipótese}}{=} B \cdot (A \cdot C) \underset{\substack{\text{associatividade} \\ \text{do produto}}}{=} (\overbrace{B \cdot A}^{=I}) \cdot C \underset{\substack{\text{por} \\ \text{hipótese}}}{=} I \cdot C = C$$

$$\Rightarrow \boxed{B = C.}$$

$\square$

PROPOSIÇÃO: Valem as seguintes propriedades para a inversa: sendo A e B inversíveis, então:

01) $(A^{-1})^{-1} = A$. (idempotência da inversa)

02) $(k \cdot A)^{-1} = k^{-1} \cdot A^{-1}$; onde $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

03) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

DEMONSTRAÇÃO:

01) Note que:

$$A^{-1} \cdot A = I \quad \text{e} \quad A \cdot A^{-1} = I.$$

Então, A^{-1} é inversível, e a sua inversa será A, ou seja,

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

02) Basta notar que:

$$\bullet \quad (k.A).(k^{-1}.A^{-1}) = \overbrace{(k.k^{-1})}^{=1}.\underbrace{(A.A^{-1})}_{I} = 1.I = I.$$

juntamos os números reais

$$\bullet \quad (k^{-1}.A^{-1}).(k.A) = \underbrace{(k^{-1}.k)}_{1}.\underbrace{(A^{-1}.A)}_{I} = 1.I = I.$$

Portanto, $k.A$ é inversível, e a sua inversa é dada por $k^{-1}.A^{-1}$; ou seja:

$$(k.A)^{-1} = k^{-1}.A^{-1}$$

03) $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$:

De fato, basta notar que:

$$\bullet \quad (A.B).(B^{-1}.A^{-1}) = A.\underbrace{(B.B^{-1})}_{I}.A^{-1} = (A.I)A^{-1} = A.A^{-1} = I$$

$$\bullet \quad (B^{-1}.A^{-1}).(A.B) = B^{-1}.\underbrace{(A^{-1}.A)}_{I}.B = B^{-1}.I.B = B^{-1}.B = I$$

Portanto, $A \cdot B$ é inversível, e a sua inversa é $B^{-1} \cdot A^{-1}$; ou seja:

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

$\square$

Como obter inversa de uma matriz, se existir, será apresentado a posteriori, depois de avançarmos um pouco sobre estudo de sistemas lineares.

MATRIZES NA FORMA ESCALONADA REDUZIDA POR LINHAS:

DEF.: Dizemos que uma matriz A está na forma escalonada reduzida por linhas se:

(i) o primeiro elemento não nulo de uma linha deve ser 1, e chama-se PIVÔ.

(ii) Em duas linhas consecutivas não nulas, o pivô da linha de baixo fica mais à direita do pivô da linha de cima, para produzir um efeito de "escada".

(iii) Na coluna onde houver um pivô, os demais elementos devem ser zeros.

(iv) se existirem linhas nulas, elas ficarão na base da matriz.

EXEMPLOS:

01)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) OK.

(ii) OK!

(iii) OK!

(iv) OK!

Logo, A está na forma escalonada reduzida por linhas.

02)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta matriz não está na forma escalonada reduzida

por linhas.
[faltam os itens (ii) e (iii)]

03) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ está na forma escalonada reduzida por linhas.

04) $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ está na forma escalonada reduzida por linhas.

Obs.: Uma matriz quadrada que: não possua linhas nulas e que está na forma escalonada reduzida por linhas será obrigatoriamente a matriz identidade.

SISTEMAS LINEARES:

Def.: Chama-se uma equação linear nas variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ toda equação da forma

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b. \quad ; \text{ onde}$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}$.

Uma n-upla ordenada $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ chama-se uma solução dessa equação se

$$a_1 . \alpha_1 + a_2 . \alpha_2 + \cdots + a_n . \alpha_n = b.$$

Ex: $2x + 3y - z = 6$ é uma equação linear nas variáveis x, y e z e a terna ordenada $(1, 1, -1)$ é uma solução dessa equação, pois

$$2.(1) + 3.(1) - 1.(-1) = 6.$$

Def: Chama-se um <u>SISTEMA LINEAR</u> um conjunto de equações lineares:

$$(*)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

Neste caso, (*) é um sistema linear com n equações a m incógnitas.

Chama-se uma solução do sistema (*) toda m-upla ordenada $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ que verifique todas as n equações do sistema dado.

Existem várias técnicas para resolver sistemas lineares. A mais "simples" consiste em ir isolando variáveis das equações de modo a obter uma única equação com apenas uma variável e, Depois, retornando nas substituições, encontrando os valores das demais variáveis.

Na próxima aula faremos isso.