Fundação Universidade Federal de Pelotas
Disciplina de Álgebra Linear I
Lista 01 de Exercícios - Matrizes
Prof. Dr. Maurício Zahn

1. Sejam $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, calcule $3A + 4B - 2C$.

2. Sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{3\times 3}$ e $B = (b_{ij})_{3\times 3}$, dadas respectivamente por
$$a_{ij} = i - 2j \;\text{ e }\; b_{ij} = \begin{cases} i-j, & \text{se } i > j \\ 1, & \text{se } i \le j. \end{cases}$$
Determine $A + B$ e $A \cdot B$.

3. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, determine a matriz AB. Existe a matriz BA? Justifique.

4. Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & y & 5 \\ 2 & 3 & z \end{pmatrix}$ e $D = (d_{ij})$ uma matriz diagonal de ordem 3. Determine os valores de x, y e z para os quais se verifique
$$AD = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 10 \\ 6 & 12 & 25 \\ 4 & 9 & 20 \end{pmatrix}.$$

5. É verdade que se $A \cdot B = 0$, então $B \cdot A = 0$?

6. Mostre através de uma exemplo que na álgebra das matrizes, pode acontecer que o produto de dois elementos não nulos pode resultar no neutro aditivo (matriz nula).

7. Seja $A_{m\times m} = (a_{ij})_{m\times m}$ uma matriz quadrada. Definimos o *traço* de A, e escrevemos $tr(A)$, como a soma dos elementos da diagonal principal, ou seja,
$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + ... + a_{mm}.$$
Mostre que $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$, onde A e B são matrizes $m \times m$.

8. **(Sel. Mestrado UFRGS 2006/2)** Se M é uma matriz $n \times n$ com elementos $\{m_{ij}\}_{1\le i,j\le n}$, definimos o seu *traço* por meio da expressão $tr(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{ii}$.
   (a) Se A e B são matrizes $n \times n$, então prove que $tr(AB) = tr(BA)$.
   (b) Se I é a matriz identidade $n \times n$, então mostre que não existem matrizes A e B tais que $AB - BA = I$.

9. Sejam $A = (a_{ij})_{n\times n}$ e $B = (b_{ij})_{n\times n}$ matrizes triangulares superiores. Mostre que AB é uma matriz triangular superior com diagonal $a_{11}b_{11}$, $a_{22}b_{22}$, ..., $a_{nn}b_{nn}$.

10. Dê um exemplo de duas matrizes A e B de mesmo tamanho tais que
$$(A + B)(A - B) \neq A^2 - B^2.$$

11. É verdade, de modo geral, que $(A+B)^2 = A^2+2A\cdot B+B^2$, onde A e B são matrizes?

12. Para cada número real α, considere a matriz

$$T_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

(a) Mostre que $T_\alpha T_\beta = T_{\alpha+\beta}$.

(b) Mostre que $T_{-\alpha} = T_\alpha^t$.

13. Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, encontre as matrizes AA^t e A^tA, se existirem.

14. Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & x^2 \\ 2x-1 & 0 \end{pmatrix}$. Se $A^t = A$, encontre o valor de x.

15. Dadas duas matrizes simétricas $n \times n$ A e B.

(a) Prove que $A + B$ é simétrica.

(b) Prove que se $AB = BA$, então AB é simétrica.