ÁLGEBRA LINEAR I

16/09/25 – AULA 01

PROF. MAURÍCIO ZAHN.

wp.ufpel.edu.br/zahn (página da disciplina)

Nesta disciplina estudaremos matrizes, sistemas lineares, determinantes, espaços vetoriais, transformações lineares e autovalores/autovetores.

MATRIZES:

Def.: Chama-se matriz toda tabela com m linhas e n colunas, dispondo assim de m.n elementos.

Uma dada matriz geralmente é representada por letras maiúsculas do nosso alfabeto e, seus respectivos elementos pela letra minúscula correspondente, acompanhada de dois subíndices: um para designar a linha em que o elemento se encontra e outro para designar a coluna.

Simbolicamente, representamos uma matriz A por

$$A = (a_{ij})_{\boxed{m \times n}} \rightarrow \text{o "tamanho" ou ordem da matriz.}$$

linha (i) — coluna (j)

Ex.: $A = (a_{ij})_{3\times 2}$, tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} i+j, & \text{se } i = j \\ 2i-j, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Neste caso, temos: $A = (a_{ij})_{3\times 2}$ possuindo 3 linhas e 2 colunas.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}_{3\times 2};$$

onde, neste caso, tem-se:

- $a_{11} = 1+1 = 2$ (pois $i=j$)
- $a_{12} = 2.(1) - 2 = 0$ (pois $i \neq j$)

- $a_{21} = 2.(2) - 1 = 3$
- $a_{22} = 2 + 2 = 4$
- $a_{31} = 2.(3) - 1 = 5$
- $a_{32} = 2.(3) - 2 = 4$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

TIPOS DE MATRIZES: Uma matriz é dita quadrada quando o número de linhas e de colunas for igual, i.e., $A = (a_{ij})_{m \times m}$. Neste caso, destacam-se duas diagonais, a diagonal principal é a diagonal formada pelos elementos a_{ii} ; $i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$.

Quando $m \neq n$, a matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ chama-se retangular. Neste caso, não existem diagonais.

Ex.:
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}_{2 \times 3}$$ é retangular.

Frente a este conceito, temos os seguintes tipos básicos de matrizes:

(a) MATRIZ NULA: é a matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ tal que $a_{ij} = 0$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$.

Ex.: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

são matrizes nulas.

(b) MATRIZ DIAGONAL: É toda matriz quadrada na qual $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$. Em palavras, é toda matriz quadrada na qual, fora da diagonal (principal), todos os elementos são zeros.

Ex.: $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}_{3\times 3}$; $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}_{3\times 3}$

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{4\times 4}$$

são exemplos de matrizes diagonais. Note que $O = (o_{ij})_{4\times4}$ dada, além de diagonal é nula.

De forma simplificada, podemos representar uma matriz diagonal escrevendo

$$A = \text{diag}\,(a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{mm})$$

Ex:
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \text{diag}\,(2, -1, 5)$$

(c) MATRIZ IDENTIDADE: é toda matriz diagonal (e, portanto, quadrada) na qual os elementos da diagonal são todos iguais a 1, ou seja:

$$I_m = \text{diag}\,(1, 1, 1, \dots, 1)_m \quad , \text{ i.e.:}$$

$$I_m = I_{m\times m} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{m\times m}$$

Ex.: $I_3 = \text{diag}(1,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3}$

Uma outra forma de representar a matriz identidade é usando o símbolo de DELTA DE KRONECKER:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Assim,

$$I_n = (\delta_{ij})_{n\times n}$$

(d) MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR: É uma matriz quadrada na qual $a_{ij} = 0$, se $i > j$.

Geometricamente, significa que, abaixo da diagonal principal os elementos são zeros, e então, a parte não nula é visualizada como um triângulo acima da diagonal, contendo-a.

Ex:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}_{4\times 4}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

(e) MATRIZ TRIANGULAR INFERIOR: É uma matriz quadrada na qual $a_{ij} = 0$, se $i < j$.

Geometricamente, significa que, acima da diagonal principal os elementos são zeros, e então, a parte não nula é visualizada como um triângulo abaixo da diagonal, contendo-a.

Ex:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{4\times 4}$$

Obs: Note que, neste contexto, toda matriz diagonal é simultaneamente triangular inferior e superior

(f) MATRIZ LINHA: É toda matriz $A = (a_{ij})_{1 \times n}$

Ex.: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}_{1 \times 4}$

(g) MATRIZ COLUNA: É toda matriz $A = (a_{ij})_{m \times 1}$.

Ex.: $A = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}_{3 \times 1}$

OPERAÇÕES:

Def.: Dadas duas matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$ de mesmo tamanho, definimos a adição

$$C = A + B \text{ , tal que}$$

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \, ,$$

ou seja, somamos elemento de mesma posição com elemento de mesma posição.

Note que este conceito de adição matricial não é novidade, pois era dessa forma que efetuávamos soma de vetores na geometria analítica:

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \quad ; \quad \vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$$

$$\vec{u} + \vec{w} = (u_1, u_2, u_3) + (w_1, w_2, w_3)$$

$$= (u_1 + w_1, \; u_2 + w_2 \, , u_3 + w_3)$$

Isto porque uma matriz pode ser "pensada" [ISOMORFISMO] como um vetor ; ou seja, por exemplo, uma matriz $A = (a_{ij})_{3\times 3}$ é, num certo sentido (que veremos a posteriori), pode ser pensada como um vetor no $\mathbb{R}^9$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\updownarrow$$

$$\vec{A} = (a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33})$$

Ex.: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3 & 0-1 \\ -1+4 & 5-2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Def.: Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $k \in \mathbb{R}$ um número real (denotado por escalar), definimos o produto

$k.A$ por

$$k.A = (k.a_{ij})_{m \times n};$$

ou seja, multiplicar um escalar por uma matriz corresponde a multiplicar cada elemento dessa matriz pelo escalar dado.

Ex: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$;

então $3.A = 3.\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.0 & 3.(-1) \\ 3.2 & 3.6 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 6 & 18 \end{pmatrix}$$

Def.: Dizemos que duas matrizes de mesmo tamanho $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$ são iguais se, e somente se, $a_{ij} = b_{ij}$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Queremos explorar propriedades aritméticas das matrizes, e também queremos definir o produto de matrizes. Para isto, precisamos introduzir a notação de somatório.

Def.: Seja $F(n)$ uma expressão qualquer que depende de $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$. Definimos o somatório dos $F(n)$, com n variando de 1 até k, por:

$$\sum_{n=1}^{k} F(n) = F(1) + F(2) + F(3) + \cdots + F(k)$$

Ex.: $$\sum_{n=1}^{3} (n^2+1) = (1^2+1) + (2^2+1) + (3^2+1)$$

$$= 2 + 5 + 10 = 17$$

PROPRIEDADES: Sejam $F(n)$ e $G(n)$ duas expressões que dependem de $n \in \mathbb{N}$. Então:

01) $$\sum_{n=1}^{k} \alpha = k \cdot \alpha$$

02) $$\sum_{n=1}^{k} \alpha F(n) = \alpha \cdot \sum_{n=1}^{k} F(n)$$

03) $$\sum_{n=1}^{k} \left(F(n) + G(n)\right) = \sum_{n=1}^{k} F(n) + \sum_{n=1}^{k} G(n)$$

Provemos (03):

$$\sum_{n=1}^{k} \left(F(n) + G(n)\right) = F(1) + G(1) + F(2) + G(2) +$$

$$+ F(3) + G(3) + \cdots + F(k) + G(k) =$$

$$= \underbrace{F(1) + F(2) + \cdots + F(k)}_{} + \underbrace{G(1) + G(2) + \cdots + G(k)}_{}$$

$$= \sum_{n=1}^{k} F(n) + \sum_{n=1}^{k} G(n)$$