VARIÁVEIS COMPLEXAS

$\boxed{13/08/25 - \text{AULA } 29}$

ZEROS E SINGULARIDADES

Def.: Sejam $\Omega \subset \mathbb{C}$ uma região e $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Dado $z_0 \in \Omega$, dizemos que z_0 é um zero de ordem m, $m \in \mathbb{N}$, se existir uma função g holomorfa, definida em uma vizinhança de z_0 (ou seja, $\mathcal{U}(z_0)$) tal que $g(z_0) \neq 0$ e

$$f(z) = (z - z_0)^m \cdot g(z),$$

$\forall z \in \mathcal{U}(z_0)$.

Ex.: $f(z) = \operatorname{sen} z$. Então, temos que $z_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ são zeros de ordem 1 para a f, pois; a série de Taylor em $z_0 = k\pi$ será:

$$f(z) = \operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (z - k\pi)^{2n+1}}{(2n+1)!} =$$

$$= (z - k\pi) - \frac{(z - k\pi)^3}{3!} + \frac{(z - k\pi)^5}{5!} - \dots$$

$$= (z-k\pi)\cdot\underbrace{\left[1 - \frac{(z-k\pi)^2}{3!} + \frac{(z-k\pi)^4}{5!} - \cdots\right]}_{=: g(z)}$$

zero de ordem 1!

$$\Rightarrow f(z) = \operatorname{sen} z = (z-k\pi)^{1}\cdot g(z),$$ e

é tal que $g(z_0) = g(k\pi) = 1 \neq 0.$

SINGULARIDADES:

Def. Dizemos que um ponto z_0 é um ponto singular isolado de uma função complexa f, se f for holomorfa numa vizinhança perfurada desse ponto, ou seja, se $f \in \mathcal{O}(\mathring{\mathcal{U}}(z_0))$.

Ex.: $f(z) = \frac{1}{z}$ é tal que $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus\{0\})$

Logo, $z=0$ é um ponto singular isolado.

Considerando a expansão da série de

Laurent para f em z_0; i.e.,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} \qquad (*),$$

podemos classificar o ponto singular z_0 em uma das três definições a seguir:

(i) Se a parte principal de $(*)$ for nula, ou seja, se o desenvolvimento acima não possuir potências negativas de $z-z_0$, então z_0 é dito um <u>ponto singular removível</u>.

(ii) Se a parte principal de $(*)$ possuir uma quantidade finita de potências negativas de $z-z_0$, então z_0 é dito um <u>pólo</u>.

(iii) Se a parte principal de $(*)$ possuir uma quantidade infinita de potências negativas de $z-z_0$, então z_0 é dito um <u>ponto singular essencial</u> ou <u>pólo infinito</u>.

No caso (iii), dizemos que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \cdots + \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m},$$

onde $a_{-m} \neq 0$.

Neste caso, dizemos que z_0 é um pólo de ordem m.

Quando $m=1$, dizemos que z_0 será um pólo simples.

EXEMPLOS:

(a) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z}$; $z=0$ será ponto singular removível pois:

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \operatorname{sen} z = \frac{1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot z^{2n+1}}{(2n+1)!} =$$

$$= \frac{1}{z} \cdot \left[z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots \right] =$$

$$= 1 + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \cdots$$

(b) $$f(z) = \frac{e^z}{z^3} = \frac{1}{z^3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} =$$

$$= \frac{1}{z^3} \cdot \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots \right)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!\,z}}_{} + \frac{1}{3!} + \frac{z}{4!} + \frac{z^2}{5!} + \cdots$$

$\hookrightarrow$ $z=0$ será um pólo de ordem 3.

RESÍDUOS:

Def.: Seja z_0 um ponto singular isolado de f.
Definimos o resíduo de f no ponto z_0,
e escrevemos

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) \quad \text{ou} \quad \operatorname{res}[f(z), z_0],$$

como sendo o coeficiente a_{-1} da expansão
da série de Laurent para f em z_0.

Ex.: $f(z) = \dfrac{e^z}{z^3} =$

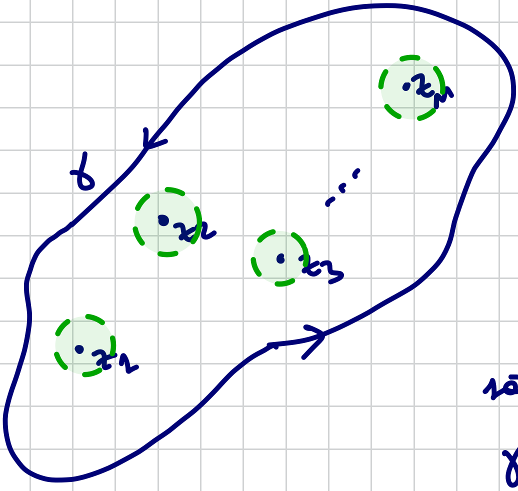
$$= \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \underbrace{\frac{1}{2!}}_{a_{-1}}\frac{1}{z} + \frac{1}{3!} + \frac{z}{4!} + \frac{z^2}{5!} + \cdots$$

$$\Rightarrow \operatorname*{res}_{z=0} f(z) = a_{-1} = \frac{1}{2}$$

TEOREMA DOS RESÍDUOS: Se f for holomorfa em Ω, e $\gamma \subset \Omega$ curva simples de Jordan, suave por partes, exceto nos pontos singulares isolados $z_1, z_2, \ldots, z_M$, no interior de γ, então,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{M} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z).$$

DEMONSTR.: Sejam $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$ pontos singulares isolados no interior do γ e $f: \Omega \to \mathbb{C}$, tal que $\gamma \subset \Omega$.

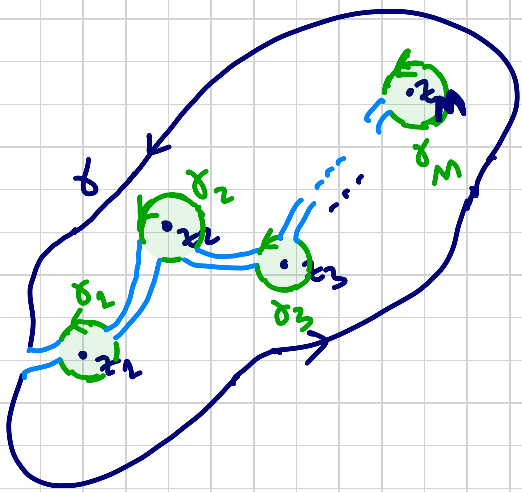


Sejam $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n > 0$ tais que

$$D_{\delta_j}(z_j) \cap D_{\delta_\ell}(z_\ell) = \emptyset$$

(é possível pois os z_k's são isolados) e considere

$\gamma_k = \partial D_{\delta_k}(z_k)$, e todos com orientação positiva.



Pelo T. de Cauchy-Goursat para regiões multiplamente conexas, tem-se que

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \dots + \int_{\gamma} f(z)dz$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{\gamma} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{M} \int_{\gamma_k} f(z)\,dz} \qquad (I)$$

As expansões de Laurent para $f(z)$ em cada ponto z_k, $k \in \{1, 2, \ldots, M\}$ é dada por

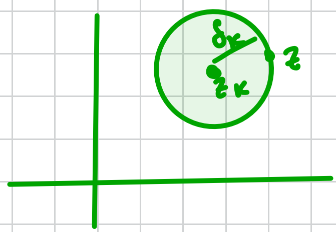
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n^{(k)} \cdot (z - z_k)^n .$$

Assim:

$$\int_{\gamma_k} f(z)\,dz = \int_{\gamma_k} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n^{(k)} \cdot (z - z_k)^n\,dz =$$

CONVERGÊNCIA É UNIFORME EM $A_{0,\delta_k}(z_k)$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n^{(k)} \underbrace{\int_{\gamma_k} (z - z_k)^n \cdot dz}$$



$$z = z_k + \delta_k e^{i\theta} \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\Downarrow$$

$$dz = \delta_k \cdot i e^{i\theta} d\theta$$

Analisando $\int_{\gamma_k} (z-z_k)^n dz = \int_0^{2\pi} (\delta_k e^{i\theta})^n \cdot \delta_k i e^{i\theta} d\theta$

$$= i \int_0^{2\pi} \delta_k^{n+1} \cdot e^{(n+1)i\theta} \cdot d\theta =$$

$$= i \cdot \delta_k^{n+1} \cdot \int_0^{2\pi} e^{(n+1)i\theta} d\theta =$$

$$= \begin{cases} i\, \delta_k^{-1+1} \int_0^{2\pi} e^0 \cdot d\theta, & \text{se } n=-1 \\ i \cdot \delta_k^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{(n+1)i\theta} d\theta, & \text{se } n \neq -1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} i \cdot 1 \cdot 2\pi, & \text{se } n=-1 \\ \dfrac{\delta_k^{n+1}}{n+1} \displaystyle\int_0^{2\pi} e^{(n+1)i\theta} \cdot (n+1) \cdot i\, d\theta, & \text{se } n \neq -1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2\pi i, & \text{se } n=-1 \\ \dfrac{\delta_k^{n+1}}{n+1} \cdot e^{(n+1)i\theta} \Big|_0^{2\pi}, & \text{se } n \neq -1. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2\pi i, & \text{se } m = -1 \\ \dfrac{\delta_k^{m+1}}{m+1} \cdot \left[\cos(m+1)2\pi + i \operatorname{sen}(m+1)2\pi - \right. \\ \qquad \left. - \cos 0 - i \operatorname{sen} 0 \right], & \text{se } m \neq -1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2\pi i, & \text{se } m = -1 \\ \dfrac{\delta_k^{m+1}}{m+1} \cdot \left[1 + 0 - 1 - 0 \right], & \text{se } m \neq -1. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2\pi i, & \text{se } m = -1 \\ 0, & \text{se } m \neq -1. \end{cases}$$

Ou seja;

$$\int_{\gamma_k} f(z)\,dz = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m^{(k)} \cdot \int_{\gamma_k} (z - z_k)^m \, dz =$$

$$= 2\pi i \; a_{-1}^{(k)}$$

Portanto, (I) fica:

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{M} \int_{\gamma_k} f(z)\,dz =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} 2\pi i \cdot a_{-1}^{(k)} = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{m} a_{-1}^{(k)}$$

$$= 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{m} \operatorname{res}_{z=z_k} f(z) .$$

$\blacksquare$

Ex.: $$\int_{|z|=1} \frac{e^z dz}{z^3} = ?$$

Solução: no interior de $|z|=1$ temos uma singularidade em $z=0$.

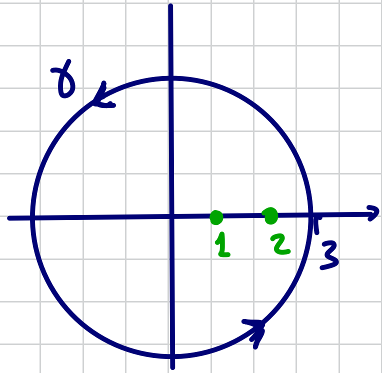
Assim:
$$\int_{|z|=1} \frac{e^z dz}{z^3} = 2\pi i \cdot \operatorname{res}_{z=0} f(z) ;$$

e já vimos que $\operatorname{res}_{z=0} f(z) = a_{-1} = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$

(no ex. da def. de resíduo)

$$\Rightarrow \int_{|z|=1} \frac{e^z dz}{z^3} = 2\pi i \cdot \frac{1}{2} = \pi i$$

02) $$\int_{|z|=3} \frac{dz}{(z-1).(z-2)} = ?$$



$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \left[\underset{z=1}{\text{res}}\, f(z) + \underset{z=2}{\text{res}}\, f(z) \right] ;$$

onde $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)} = \dfrac{1}{z-2} - \dfrac{1}{z-1}$.

$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\text{cálculo do } \underset{z=1}{\text{res}}\, f(z)}$: expandindo em série de Laurent em $z=1$ $(z_0 = +1)$, teremos:

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} =$$

$$= \frac{1}{(z-1)-1} - \frac{1}{z-1} =$$

$$= -\frac{1}{1-(z-1)} - \frac{1}{z-1}$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n - \frac{1}{z-1}$$

a_{-1}

$$\Rightarrow \operatorname*{res}_{z=1} f(z) = a_{-1} = -1.$$

cálculo do resíduo $\operatorname*{res}_{z=2} f(z)$:

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} =$$

$$= \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-2+1} =$$

$$= \frac{1}{z-2} - \frac{1}{1-(-(z-2))}$$

$$= \frac{1}{z-2} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n . (z-2)^n$$

a_{-1}

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname*{res}_{z=2} f(z) = 1}.$$

Portanto, obtemos:

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \left[\operatorname*{res}_{z=1} f(z) + \operatorname*{res}_{z=2} f(z) \right]$$

$$= 2\pi i \left[-1 + 1 \right] = \underline{\underline{0}}$$

Precisamos determinar uma forma mais eficiente para calcular o resíduo de f.

Primeiramente, se z_0 for um pólo simples:

Então, $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \frac{a_{-1}}{z-z_0} \quad \times (z-z_0)$$

$$(z-z_0) f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n+1} + a_{-1}.$$

Passando o limite com $z \to z_0$, obtemos

$$\boxed{a_{-1} = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) \cdot f(z)}$$

Quando z_0 for um pólo de ordem m:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \dots + \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}$$

Multiplicando por $(z-z_0)^m$, vem:

$$(z-z_0)^m \cdot f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n+m} +$$

$$+ a_{-1}(z-z_0)^{m-1} + a_{-2}(z-z_0)^{m-2} + \dots$$

$$\dots + a_{-m}.$$

Derivando, vem:

$$\frac{d}{dz}\left[(z-z_0)^m \cdot f(z)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+m)(z-z_0)^{n+m-1} +$$

$$(m-1) \cdot a_{-1}(z-z_0)^{m-2} + (m-2)\, a_{-2}(z-z_0)^{m-3} +$$

$$\dots + a_{-(m-1)} + 0$$

Derivando até $m-1$, vamos obter:

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right] =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+m).(n+m-1)\cdots(n+1).(z-z_0)^{n+1} + (m-1)!\,a_{-1}$$

Passando o limite com $z \to z_0$, vamos obter:

$$(m-1)!\,a_{-1} = \lim_{z\to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]$$

$$\Rightarrow a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!}\cdot \lim_{z\to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m \cdot f(z)\right]$$

Ex.: $f(z) = \dfrac{e^z}{z^3}$.

$z=0$ é polo de ordem 3. $(m=3)$

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = a_{-1} = \frac{1}{2!} \lim_{z \to 0} \frac{d^2}{dz^2} \left[(z-0)^3 \cdot f(z) \right] =$$

$$= \frac{1}{2!} \lim_{z \to 0} \frac{d^2}{dz^2} \left(\cancel{z^3} \cdot \frac{e^z}{\cancel{z^3}} \right)$$

$$= \frac{1}{2!} \cdot \lim_{z \to 0} \frac{d^2}{dz^2} (e^z)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \lim_{z \to 0} e^z = \frac{1}{2} \cdot e^0 = \frac{1}{2}$$