

EXTRA: Ache $\lim_{z \rightarrow a} \frac{f'(z)}{f(z)}$ se a for um pólo de ordem n de $f(z)$.

SOL: Sendo a um pólo de ordem n , então $f(z) = \frac{1}{(z-a)^n} h(z)$, com $h(a) \neq 0$.
Logo,

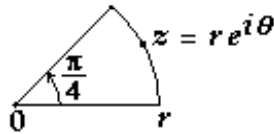
$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{(z-a)^n h'(z) - h(z)n(z-a)^{n-1}}{(z-a)^{2n}} = \frac{(z-a)^{n-1}[(z-a)h'(z) - n.h(z)]}{(z-a)^n(z-a)^n} = \\ &= \frac{(z-a)h'(z) - n.h(z)}{(z-a)^{n+1}} \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{(z-a)h'(z) - n.h(z)}{(z-a)^{n+1}} \cdot \frac{(z-a)^n}{h(z)} = \\ &= \frac{(z-a)f'(z)}{(z-a)f(z)} - \frac{n.h(z)}{(z-a)h(z)} = -\frac{n}{z-a} + \frac{h'(z)}{h(z)}, \quad h(a) \neq 0 \end{aligned}$$

Portanto, $\operatorname{res}_{z=a} g(z) = -n$.

Questão 02. Considerando o esquema abaixo, c.f. o exercício



Sendo $z = r e^{i\theta}$ temos $dz = i.r e^{i\theta} d\theta$ e então, fazendo uma majoração, obtemos

$$\left| \int_{C_r} e^{-z^2} dz \right| = \left| \int_0^{\pi/4} e^{-r^2 e^{2i\theta}} r e^{i\theta} i.d\theta \right| \leq \int_0^{\pi/4} e^{-|r^2 e^{2i\theta}|} |r e^{i\theta} i.d\theta| = \int_0^{\pi/4} e^{-r^2} r |d\theta| = \frac{r}{e^{r^2}} \cdot \frac{\pi}{4} r \rightarrow 0 \quad \text{as } r \rightarrow \infty$$

Questão 03.

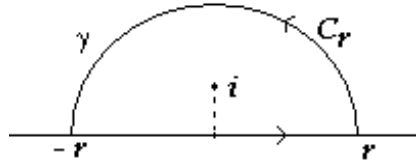
$$(f) \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 1)^2} dx$$

Primeiramente, observe que $\frac{\cos x}{(x^2 + 1)^2}$ é uma função par. Portanto,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

Vamos considerar $f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2 + 1)^2}$. Note que $\frac{\cos x}{(x^2 + 1)^2} = \Re \left(\frac{e^{ix}}{(x^2 + 1)^2} \right)$.

A função f possui pólos de ordem 2 em $z = i$ e $z = -i$. Tomando γ o caminho fechado $\gamma = [-r, r] \cup C_r$, conforme do desenho, notamos que apenas o pólo $z = i$ está no interior da região limitada por γ .



Assim, pelo teorema dos resíduos segue que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z=i} f(z)$$

Calculemos então o resíduo de f .

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=i} f(z) &= \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} [(z - i)^2 f(z)] = \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left[(z - i)^2 \frac{e^{iz}}{(z + i)^2 (z - i)^2} \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left[\frac{e^{iz}}{(z + i)^2} \right] = \lim_{z \rightarrow i} \frac{i(z + i)^2 e^{iz} - 2e^{iz}}{(z + i)^3} = \dots = \frac{1}{2ei} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \frac{1}{2ei} = \frac{\pi}{e}$$

Porém,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{C_r} f(z) dz + \int_{-r}^r f(x) dx$$

Como, pelo lema de Jordan,

$$\int_{C_r} f(z) dz = \int_{C_r} \frac{1}{(z^2 + 1)^2} e^{iz} dz \rightarrow 0 \quad \text{as } r \rightarrow \infty$$

e, então, fazendo a passagem ao limite com $r \rightarrow \infty$, temos

$$\frac{\pi}{e} = \int_{\gamma} f(z) dz = 0 + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(x) dx,$$

ou seja,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2 + 1)^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \frac{\pi}{e}$$

Porém,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 1)^2} dx = \Re \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2 + 1)^2} \right) = \Re \left(\frac{\pi}{e} \right) = \frac{\pi}{e},$$

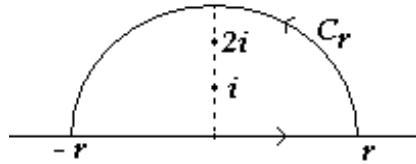
e pela paridade da função, concluímos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{\pi}{2e}$$

$$(j) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 4)}$$

Solução. Definindo $f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^2(z^2 + 4)}$, temos que $z_1 = i$ e $z_2 = -i$ são pólos de ordem 2 e $z_3 = 2i$ e $z_4 = -2i$ são pólos simples.

Seja γ o caminho fechado $\gamma = [-r, r] \cup C_r$, conforme o esquema abaixo.



Então, pelo teorema dos resíduos temos que

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{\Im m(\alpha) > 0} \operatorname{res}_{z=\alpha} f(z)$$

No caso as singularidades $z_1 = i$ e $z_3 = 2i$ estão na região interior a γ .
Portanto

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=2i} f(z) &= \lim_{z \rightarrow 2i} (z - 2i)f(z) = \lim_{z \rightarrow 2i} (z - 2i) \frac{1}{(z^2 + 1)^2(z + 2i)(z - 2i)} = \\ &= \frac{1}{((2i)^2 + 1)^2 4i} = \frac{1}{36i} = -\frac{i}{36} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=i} f(z) &= \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} [(z - i)^2 f(z)] = \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left[(z - i)^2 \frac{1}{(z + i)^2(z - i)^2(z^2 + 4)} \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{(z + i)^2(z^2 + 4)} \right] = \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} [(z + i)^{-2}(z^2 + 4)^{-1}] = \\ &= \lim_{z \rightarrow i} [(-2)(z + i)^{-3}(2z) + (-1)(z + i)^{-2}(2z) + (-2)(z + i)^{-3}(z^2 + 4)^{-1}] = \\ &= (2i)^{-2}(-1)(-1 + 4)^{-2} \cdot 2i + (-2)(2i)^{-3}(-1 + 4)^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{9} \cdot 2i + 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{3} = \\ &= \frac{i}{18} - \frac{i}{12} = \frac{2i - 3i}{36} = -\frac{i}{36} \end{aligned}$$

Logo, temos

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \left(-\frac{i}{36} - \frac{i}{36} \right) = \frac{\pi}{9}.$$

Então

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{C_r} f(z)dz + \int_{-r}^r f(x)dx.$$

Note que

$$\left| \int_{C_g} f(z) dz \right| \leq \int_{C_g} |f(z)| \cdot |dz| = \int_{C_g} \left| \frac{1}{(z^2 + 1)^2(z^2 + 4)} \right| \cdot |dz| = \int_{C_g} \frac{|dz|}{|z^2 + 1|^2 |z^2 + 4|}$$

Como $|z^2 + 1| \geq |z|^2 - 1 = r^2 - 1$ e $|z^2 + 4| \geq |z|^2 - 4 = r^2 - 4$, segue que

$$\left| \int_{C_g} f(z) dz \right| \leq \int_{C_g} \frac{|dz|}{(r^2 - 1)^2(r^2 - 4)} = \frac{1}{(r^2 - 1)^2(r^2 - 4)} \int_{C_g} |dz| = \frac{\pi r}{(r^2 - 1)^2(r^2 - 4)} \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0$$

donde segue que $\int_{C_g} f(z) dz \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow +\infty$ e, portanto, com a passagem ao limite temos que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

e então

$$\frac{\pi}{9} = \int_{\gamma} f(z) dz = 0 + \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

ou seja,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 4)} = \frac{\pi}{9}$$

$$(1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x + 2) \sin 3x dx}{x^2 + 1}.$$

Solução. Escrevendo $f(z) = \frac{(z + 2)e^{3iz}}{z^2 + 1}$, temos que seus pólos simples são $z_1 = i$ e $z_2 = -i$.

Escrevendo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(x) dx$$

e notando que, considerando o caminho fechado $\gamma = [-r, r] \cup C_r$, temos

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{C_r} f(z)dz + \int_{-r}^r f(x)dx$$

Como, pelo lema de Jordan,

$$\int_{C_r} f(z)dz = \int_{C_r} \frac{(z+2)e^{3iz}}{z^2+1} dz \rightarrow_{r \rightarrow 0} 0$$

e calculando o resíduo em $z = i$, temos

$$\operatorname{res}_{z=i} f(z) = \lim_{z \rightarrow i} (z-i)f(z) = \lim_{z \rightarrow i} (z-i) \frac{(z+2)e^{3iz}}{(z+i)(z-i)} = \frac{(2+i)e^{-3}}{2i}$$

e então

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z=i} f(z) = 2\pi i \frac{(2+i)e^{-3}}{2i} = (2+i)\pi e^{-3} = 2\pi e^{-3} + i\pi e^{-3}$$

Assim, por fim, temos

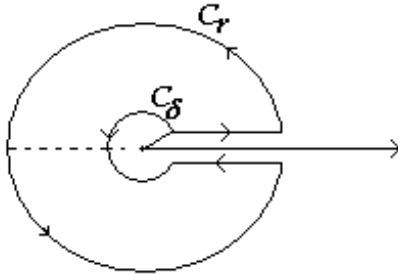
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+2)e^{ix}}{x^2+1} dx = 2\pi e^{-3} + i\pi e^{-3}$$

e então

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+2)\sin 3x dx}{x^2+1} = \Im m \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+2)e^{ix}}{x^2+1} dx \right) = \pi e^{-3}$$

Exercício Extra: Queremos mostrar que $\int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2+2x+1} dx = \frac{\pi}{2}$.

Como $\int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2+2x+1} dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{(x+1)^2} dx$, temos que $z = -1$ é um pólo de ordem 2.



Escrevendo

$$f(z) = \frac{e^{\frac{1}{2} \log z}}{(z+1)^2}$$

e calculando o seu resíduo, obtemos

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=-1} f(z) &= \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d}{dz} \left[\frac{(z+1)^2 e^{\frac{1}{2} \log z}}{(z+1)^2} \right] = \lim_{z \rightarrow -1} \left[z^{\frac{1}{2}} \right]' = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2} \log z} = \\ &= \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2} (\ln |-1| + i \arg(-1))} = \frac{1}{2} e^{-\frac{\pi}{2} i}. \end{aligned}$$

e então

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z=-1} f(z) = 2\pi i \frac{1}{2} e^{-\frac{\pi}{2} i} = \pi i (\cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2}) = \pi i (0 - i) = \pi.$$

Mas

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{C_r} f(z) dz - \int_{C_{\delta}} f(z) dz + \int_{\delta}^r \frac{e^{\frac{1}{2} \log x}}{(x+1)^2} dx + \int_r^{\delta} \frac{e^{\frac{1}{2} (\log x + 2\pi i)}}{(x+1)^2} dx$$

Fazendo $\delta \rightarrow 0$ e $r \rightarrow +\infty$, obtemos (vamos tomar também $z = re^{i\theta}$)

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_r} f(z) dz \right| &= \left| \int_{C_r} \frac{e^{\frac{1}{2} \log z}}{(z+1)^2} dz \right| \leq \int_{C_r} \frac{|e^{\frac{1}{2} \log z}| \cdot |dz|}{|z+1|^2} = \int_{C_r} \frac{|r^{\frac{1}{2}} e^{i\theta}| \cdot |ire^{i\theta}| d\theta}{(r-1)^2} \leq \\ &\leq \frac{r^{\frac{3}{2}}}{r^2 - 2r + 1} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2\pi r^{\frac{3}{2}}}{r^2 - 2r + 1} \rightarrow_{r \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

Analogamente mostra-se que $\int_{C_{\delta}} f(z) dz \rightarrow_{\delta \rightarrow 0} 0$.

Assim, conforme os cálculos acima, temos

$$\pi = 0 - 0 + \int_{\delta}^r \frac{x^{\frac{1}{2}}}{(x+1)^2} dx - \int_{\delta}^r \frac{x^{\frac{1}{2}} e^{\pi i}}{(x+1)^2} dx$$

e então

$$\pi = (1 - e^{\pi i}) \int_{\delta}^r \frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2} dx$$

Dividindo a igualdade acima por $1 - e^{\pi i}$ e fazendo a passagem ao limite quando $\delta \rightarrow 0$ e $r \rightarrow +\infty$, obtemos

$$\frac{\pi}{1 - e^{\pi i}} = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2} dx$$

ou seja,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2} dx = \frac{\pi}{1 - (\cos \pi + i \sin \pi)} = \frac{\pi}{2}.$$