VARIÁVEIS COMPLEXAS.

20/08/25 - AULA 32

AULA DE EXERCÍCIOS

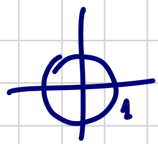
L13)

8. Calcule cada integral abaixo, usando uma série de Laurent apropriada.

(a) $\displaystyle\int_{|z|=1} \operatorname{sen}\frac{1}{z}\,dz$ (b) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\cos\frac{1}{z^2}}{z}\,dz$ (c) $\displaystyle\int_{|z|=2} e^{\frac{1}{z^2}}\,dz$

(d) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z}\,dz$ (e) $\displaystyle\int_{|z|=1} e^{z+\frac{1}{z}}\,dz$

(b) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\cos\frac{1}{z^2}}{z}\,dz.$



$$f(z) = \frac{1}{z}\cdot\cos\frac{1}{z^2} = \frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(z^{-2})^{2n}}{(2n)!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot z^{-4n-1}}{(2n)!}$$

$$f_n(z) = \frac{(-1)^n\, z^{-4n-1}}{(2n)!}$$

$$\underset{\sim}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\frac{1}{(2n)!}}{\frac{1}{[2(n+1)]!}} =$$

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}} \; \frac{1}{\cancel{(2n)!}} \cdot (2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!} = \underset{\sim}{\infty}$$

Vamos usar o teste M de Weierstrass para mostrar convergência uniforme da série dada:

(i) $$|f_n(z)| = \frac{|z|^{-4n-2}}{(2n)!} \leq \frac{1}{(2n)!} := M_n .$$

$|z| \geq 1.$

$|z|^{-1} \leq 1.$

$|z|^{-4n-1} \leq 1$

QUEREMOS UMA INTEGRAL EM $|z| = 1$.

(ii) $$\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \sum_{n=1} \frac{1}{(2n)!}$$ é convergente,

basta usar o teste da razão do estudo de séries (do Cálculo II mesmo)

Então, pelo teste M de Weierstrass, segue que a série obtida converge uniformemente na região onde $|z| \geq 1$. (ou seja a série de Laurent converge uniformemente num anel do tipo

$A_{1,R}(0)$ ; $R>1$ ). Então, podemos permutar a integração com o somatório. Assim:

$$\int_{|z|=2} \frac{\cos \frac{1}{z^2}}{z}\, dz = \int_{|z|=1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot z^{-4n-1}}{(2n)!} \cdot dz =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_{|z|=1} z^{-4n-1} \cdot dz =$$

Note que $\displaystyle\int_{|z|=1} z^{-4n-1} dz = \begin{cases} \displaystyle\int_{|z|=1} z^{-1} dz, & \text{se } n=0 \\ \displaystyle\int_{|z|=1} z^{-4n-1} dz, & \text{se } n \neq 0 \end{cases}$

Assim, temos que:

- se $n \neq 0$, então

$$\int_{|z|=1} z^{-4n-1} dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_0^{2\pi} (e^{i\theta})^{-4n-1} \cdot i e^{i\theta} d\theta =$$

$z = e^{i\theta} \Rightarrow dz = i e^{i\theta} d\theta$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_0^{2\pi} i e^{-4in\theta - \cancel{i\theta} + \cancel{i\theta}} \cdot d\theta$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(-\frac{1}{4n}\right) \int_0^{2\pi} e^{-4in\theta} (-4ni\,d\theta) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!\,4n} e^{-4in\theta} \Big|_0^{2\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!\,4n} \cdot \left(e^{-8ni\pi} - 1\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!\,4n} \cdot \left( \underbrace{\cos(8n\pi)}_{=1} - i \underbrace{\operatorname{sen}(8n\pi)}_{=0} - 1 \right) = 0.$$

• se $n = 0$, teremos

$$\int_{|z|=1} z^{-4n-1} dz = \int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 2\pi i.$$

conclusão: $$\int_{|z|=1} f(z)\,dz = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!\,4n} \cdot 0}_{n \neq 0} + \underbrace{\frac{(-1)^0}{0!} \cdot 2\pi i}_{n=0}$$

$$= 2\pi i \quad .$$

$\underline{\text{obs:}}$ Este problema não se pode usar a fórmula integral de Cauchy $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f(z)\,dz}{z - z_0}$;

pois neste caso teríamos $f(z) = \cos \frac{1}{z^2}$;

e no entanto, sendo $z_0 = 0$, $\nexists\, f(z_0)$. Além disso, $\cos \frac{1}{z^2}$ não é holomorfa no ponto $z_0$.

---

- $\Sigma$ resíduos; pode funcionar?

$$\int_{|z|=1} \frac{\cos \frac{1}{z^2}}{z}\, dz =$$

$z = 0$ é singularidade.

Pela expansão em série de Laurent, temos: (feito acima)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot z^{-4n-1}}{(2n)!} =$$

$$= \frac{z^{-1}}{0!} + \frac{z^{-5}}{2!} + \dots = \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^5} + \dots$$

$$\Rightarrow a_{-1} = 1. \quad \Rightarrow \operatorname*{res}_{z=0} f(z) = 1.$$

Assim: $$\int_{|z|=1} \frac{\cos \frac{1}{z^2}}{z}\, dz = 2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{z=0} f(z) =$$

$$= 2\pi i \cdot 1 = 2\pi i.$$