

No final da aula passaremos a enunciar o teorema:

TEOREMA: Seja $f \in \mathcal{O}(A_{r,R}(z_0))$, onde $0 < r < R \leq \infty$.

Então, f possui uma representação única como uma série da forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} ;$$

$r < |z-z_0| < R$; que converge absolutamente, $\forall z \in A_{r,R}(z_0)$
e uniformemente em todo anel fechado do tipo

$$\rho_1 \leq |z-z_0| \leq \rho_2 \quad ; \quad \text{onde } r < \rho_1 < \rho_2 < R.$$

A série acima chama-se representação de Laurent para a f.

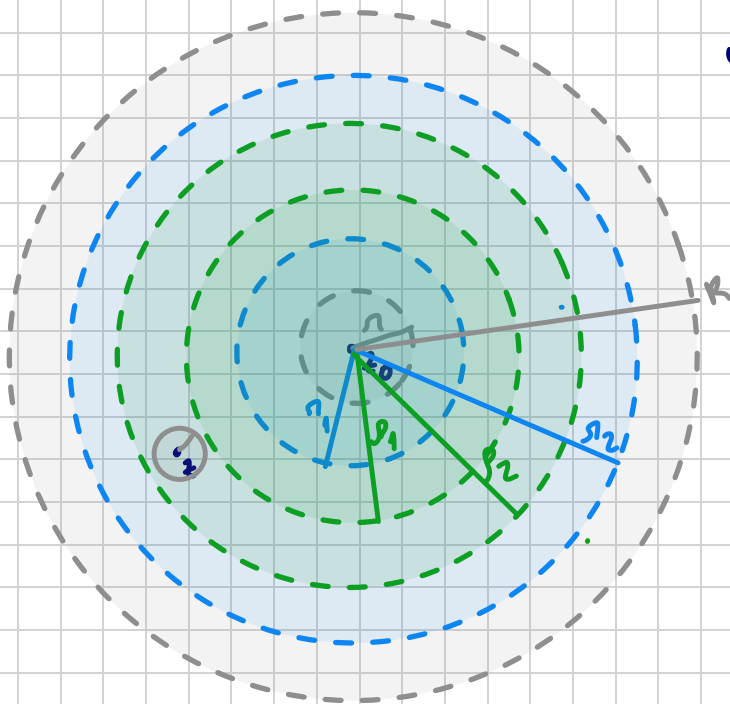
Os números da forma

$$a_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{\partial D(\rho) \\ \rho}} \frac{f(w)dw}{(w-z_0)^{m+1}} \quad ; \quad m \in \mathbb{Z},$$

onde $r < \rho < R$, e são chamados de coeficientes de Laurent de f.

Vejaemos na demonstração:

DEMONSTRA: Sejam $r < r_1 < \rho_1 < \rho_2 < r_2 < R$ e considere $A_{r,R}(z_0)$.

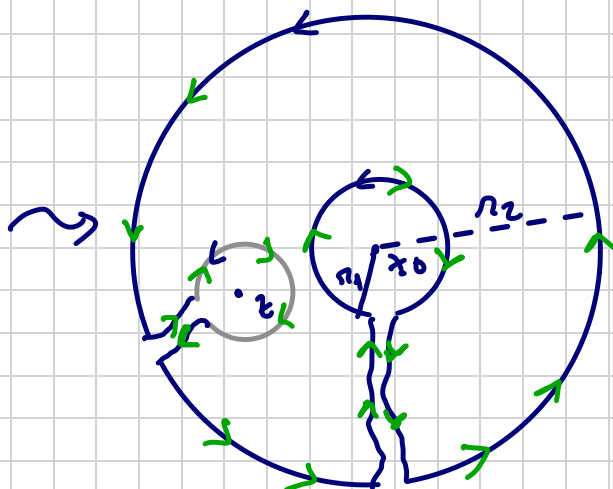
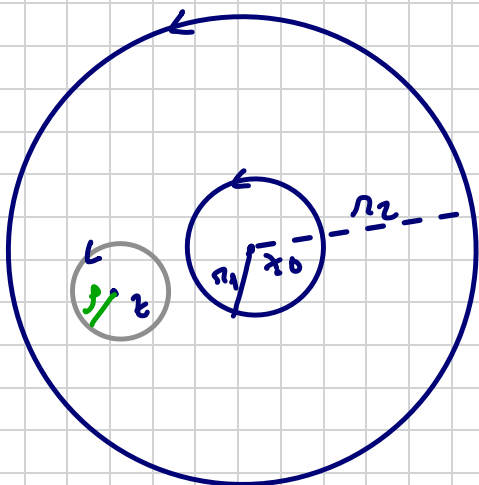


Sejam $z \in A_{r,R}(z_0)$ e

$\rho > 0$ tal que

$$\overline{D(z)}_{\rho} \subset A_{\rho_1, \rho_2}(z_0)$$

Seo Teorema de Cauchy-Goursat para regiões múltiplamente conexas, considerando a função $w \mapsto \frac{f(z)}{w-z}$, temos que a mesma é holomorfa no $\overline{D(z)}_{\rho}$ e em $A_{r_1, r_2}(z_0)$.



$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0)} \frac{f(w)dw}{w-z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z)} \frac{f(w)dw}{w-z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0)} \frac{f(w)dw}{w-z} \quad (*)$$

Como, pela fórmula integral de Cauchy;

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z)} \frac{f(w)dw}{w-z} \quad ; \quad w \in \partial D(z).$$

Então; temos que (*) fica:

$$\frac{1}{2\pi i'} \int_{\partial D(z_0, r_2)} \frac{f(w)dw}{w-z} = f(z) + \frac{1}{2\pi i'} \int_{\partial D(z_0, r_1)} \frac{f(w)dw}{w-z}$$

$$\Rightarrow f(z) = \underbrace{\frac{1}{2\pi i'} \int_{\partial D(z_0, r_2)} \frac{f(w)dw}{w-z}}_{(I)} - \underbrace{\frac{1}{2\pi i'} \int_{\partial D(z_0, r_1)} \frac{f(w)dw}{w-z}}_{(II)} \quad (\text{etc})$$

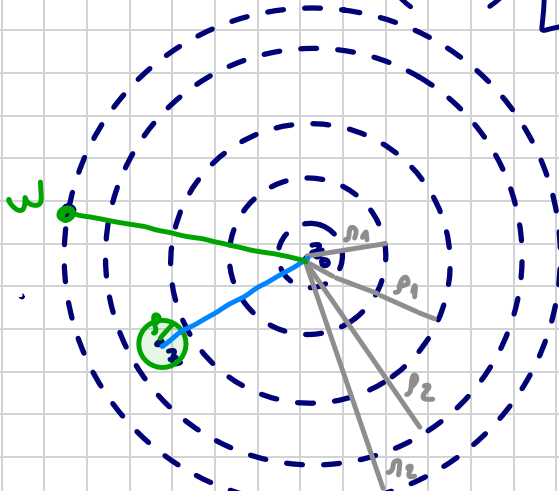
Vamos analisar, separadamente, (I) e (II):

(I): em $\partial D(z_0, r_2)$: primeiramente, note que

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-z_0 - (z-z_0)} = \frac{1}{(w-z_0) \cdot \left[1 - \frac{z-z_0}{w-z_0} \right]}$$

Note que:

$\forall w \in \partial D(z_0, r_2)$



Théorème: $|w - z_0| = r_2$ et $|z - z_0| \leq \rho_2$

Entonces: $\frac{|z - z_0|}{|w - z_0|} \leq \frac{\rho_2}{r_2} < 1$. Dicho:

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{(w - z_0)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}} =$$

$$= \frac{1}{w - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}}$$

série géométrique
convergente, fois

$$\frac{|z - z_0|}{|w - z_0|} < 1.$$

Además dicho, note que:

$$\bullet \left| \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}} \right| = \frac{\overset{\rho_2}{|z - z_0|}^n}{\underset{= r_2}{(w - z_0)^{n+1}}} \leq \frac{\rho_2^n}{r_2^{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{r_2} \cdot \left(\frac{\rho_2}{r_2} \right)^n := M_n; \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\bullet \sum_{n=0}^{\infty} M_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r_2} \cdot \left(\frac{\rho_2}{r_2} \right)^n = \frac{1}{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho_2}{r_2} \right)^n < 1,$$

que é uma série geométrica convergente.

Logo, pelo teste M de Weierstrass, segue que a série $\frac{1}{w-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}$ converge uniformemente em $\partial D(z_0, r_2)$.

Multiplicando por $\frac{1}{2\pi i} \cdot f(w)$, vem:

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{f(w)}{w-z} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n \cdot f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}$$

Integrando em $\partial D(z_0, r_2)$, temos ainda:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, r_2)} \frac{f(w)dw}{w-z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, r_2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n f(w)dw}{(w-z_0)^{n+1}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, r_2)} \frac{f(w)dw}{(w-z_0)^{n+1}} \right) \cdot (z-z_0)^n$$

CONV. UNIFORME:
PODEMOS TROCAR
O SOMATÓRIO

$\therefore a_n$

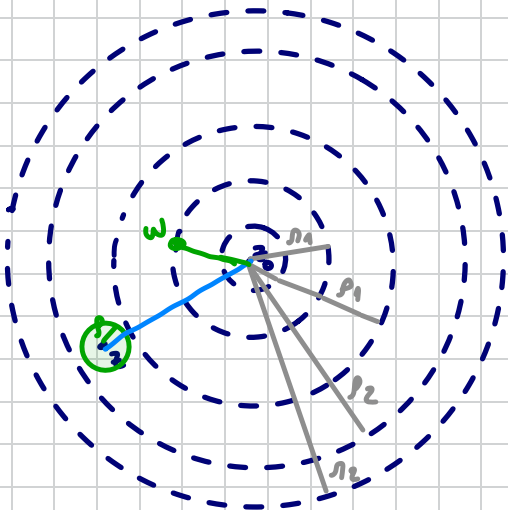
$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z-z_0)^n, \text{ onde}$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{\partial D(z_0) \\ r_2}} \frac{f(w)dw}{(w-z_0)^{n+1}}.$$

(II): Em $\partial D(z_0)$. Neste caso, escreva:

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-z_0-(z-z_0)} = \frac{1}{(z-z_0) \cdot \left[\frac{w-z_0}{z-z_0} - 1 \right]} =$$

$$= - \frac{1}{(z-z_0) \cdot \left[1 - \frac{w-z_0}{z-z_0} \right]};$$



onde:

$$|w-z_0| = r_1.$$

$$\underline{r_1 < |z-z_0| < r_2}$$

$$\hookrightarrow \frac{1}{|z-z_0|} < \frac{1}{r_1}$$

Disso, tem-se que

$$\frac{|w-z_0|}{|z-z_0|} < \frac{\rho_1}{\rho_1} < 1$$

E então :

$$\frac{1}{w-z} = - \frac{1}{z-z_0} \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w-z_0}{z-z_0} \right)^n}_{\substack{\text{série geométrica} \\ \text{convergente,} \\ \text{devido à análise} \\ \text{asimétrica}}}$$

Note que:

$$\bullet \left| \frac{(w-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} \right| = \frac{|w-z_0|^n}{|z-z_0|^{n+1}} < \frac{\rho_1^n}{\rho_1^{n+1}} = \frac{1}{\rho_1} \cdot \left(\frac{\rho_1}{\rho_1} \right)^n := M_n$$

$$\bullet \sum_{n=0}^{\infty} M_n = \frac{1}{\rho_1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho_1}{\rho_1} \right)^n \text{ é convergente, pois é } \text{ série geométrica com razão}$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_1} < 1.$$

Então, pelo teste M de Weierstrass, segue que a
série $\frac{1}{w-z} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}$ converge uniforme-

mente em $\mathcal{D}_{\rho_1}(z_0)$. Multiplicando por $\frac{1}{2\pi i} f(w)$

e integrando na $\mathcal{D}_{\rho_1}(z_0)$, vem:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, r_1)} \frac{f(w)dw}{w-z} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, r_1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w-z_0)^n \cdot f(w)dw}{(z-z_0)^{n+1}} =$$

↑
CONV.
UNIFORME

$$- \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, r_1)} (w-z_0)^n \cdot f(w)dw \right) \cdot \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}$$

$$= - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, r_1)} \frac{f(w)dw}{(w-z_0)^{-n}} \right) \cdot \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} \quad \textcircled{=}$$

Ersetze $n+1 = l$. Entzwe

$-n = 1-l$. Dimm;

$$\textcircled{=} - \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, r_1)} \frac{f(w)dw}{(w-z_0)^{1-l}} \right) \cdot \frac{1}{(z-z_0)^l} =$$

$$= - \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, r_1)} \frac{f(w)dw}{(w-z_0)^{1-n}} \right)}_{\therefore a_n} \cdot \frac{1}{(z-z_0)^n}$$

$$= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}.$$

Assim, levando estes resultados para (14), obtemos:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)dw}{w-z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)dw}{w-z} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n - \left(- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n};$$

$$\text{onde } a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)dw}{(w-z_0)^{n+1}} \quad e$$

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)dw}{(w-z_0)^{1-n}}.$$

Segundo princípio de deformação, podemos tomar $\rho_1 < \rho < \rho_2$ e considerar

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0)} \frac{f(w)dw}{(w-z_0)^{n+1}} \quad \text{e} \quad a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0)} \frac{f(w)dw}{(w-z_0)^{1-n}}.$$

onde $n \in \mathbb{N}$. De forma geral, tomando $n \in \mathbb{Z}$, podemos juntar estas duas igualdades numa só:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0)} \frac{f(w)dw}{(w-z_0)^{n+1}}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Resta mostrar a unicidade da representação da série de Laurent:

Suponha que ^(*)

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n (z-z_0)^n$$

duas representações da série de Laurent para a f.

Vamos mostrar que $a_n = b_n, \forall n$.

(*) COMPROAMOS A NOTAÇÃO:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n.$$

Esta série converge uniformemente em todo

$A_{r_1, r_2}(z_0)$ e absolutamente em $A_{r_1, r_2}(z_0)$

Multiplique por $(z-z_0)^{-k-1}$ e integre em

$\partial D(z_0)$, obtemos:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^{n-k-1} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n (z-z_0)^{n-k-1}$$

$$\Rightarrow \int_{\partial D(z_0)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^{n-k-1} dz = \int_{\partial D(z_0)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n (z-z_0)^{n-k-1} dz$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \underbrace{\int_{\partial D(z_0)} (z-z_0)^{n-k-1} dz}_{\text{}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \underbrace{\int_{\partial D(z_0)} (z-z_0)^{n-k-1} dz}_{\text{}}$$

Note que:

$$\int_{\partial D(z_0)} (z-z_0)^{n-k-1} dz = \begin{cases} 0, & \text{se } n-k-1 \neq -1 \\ 2\pi i, & \text{se } n-k-1 = -1, \\ & \text{i.e., se } n=k. \end{cases}$$

Outra vez, nos somatórios acima, todos os termos se anulam, exceto quando $n=k$; i.e., obtemos:

$$\cancel{a_k \cdot 2\pi i} = \cancel{b_k \cdot 2\pi i} \Rightarrow a_k = b_k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Outra vez, a representação é única.

□

Observações:

01) A série

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$$

pode ser compactada como

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$$

02) A parte $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$ chama-se PARTE

PRINCIPAL ou PARTE REGULAR da série.

03) se $a_{-n} = 0, \forall n \in \mathbb{N}$, a série de Laurent torna-se a série de Taylor.

ex.: $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$. Representar na

série de Laurent no anel $1 < |z| < 2$. ($z_0 = 0$)

solução: Decompondo em frações parciais, temos obter:

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \underbrace{\frac{1}{z-2}}_{I} - \underbrace{\frac{1}{z-1}}_{II}$$

• Para $|z| < 2$:

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2-z} = -\frac{1}{2(1-\frac{z}{2})} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n}_{\text{CONVERGÊ VÁLIDA}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$$

CONVERGÊ VÁLIDA

$$|z| < 2 \Rightarrow \left|\frac{z}{2}\right| < 1$$

• Para $|z| > 1$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-1} &= \frac{1}{z(1-\frac{1}{z})} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} \end{aligned}$$

$|z| > 1 \Rightarrow \left|\frac{1}{z}\right| < 1$
conv.

AJUSTANDO OS INDICES

Logo, obtenho:

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{z^{n+1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}.$$

02) $f(z) = \frac{e^z}{z^3}$ no anel $A(0)_{0,\infty}$.

já foi desenvolvido na introdução da aula passada:

$$f(z) = \frac{1}{z^3} \cdot e^z = \frac{1}{z^3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-3}}{n!} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z \cdot z} + \frac{1}{3!} + \frac{z}{4!} + \frac{z^2}{5!} + \dots$$

03) $f(z) = \frac{1}{z-6}$. Expandir na região onde $|z-4| > 2$.

Solução: Escreva:

$$\frac{1}{z-6} = \frac{1}{(z-4)-2} = \frac{1}{(z-4)\left(1 - \frac{2}{z-4}\right)} =$$

$$= \frac{1}{z-4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z-4}\right)^n ;$$

onde

$$\left| \frac{2}{z-4} \right| = \frac{2}{|z-4|} < \frac{2}{2} = 1. \text{ Logo, a série}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z-4}\right)^n$$

pois $|z-4| > 2 \Rightarrow \frac{1}{|z-4|} < \frac{1}{2}$

é convergente

Assim:

$$\frac{1}{z-6} = \frac{1}{z-4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(z-4)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(z-4)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(z-4)^n}$$