VARIÁVEIS COMPLEXAS

RESOLUÇÃO DE EXERCÍCIOS DA LISTA 15

5. Usando resíduos, calcule as integrais:

(a) $\displaystyle\int_{\partial D_1(0)} \frac{z^2+3z-1}{z(z^2-3)}dz$ (b) $\displaystyle\int_{\partial D_{\frac{1}{10}}(1)} \frac{dz}{z^5-1}$ (c) $\displaystyle\int_{\partial D_1(0)} \frac{e^{z^2}}{z^6}dz$

(d) $\displaystyle\int_{\partial D_1(0)} \cos\frac{1}{z^2}e^{\frac{1}{z}}dz$ (e) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z^3}{z^4-1}dz$ (f) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z(2z+1)^2}dz$

(b) Sendo $f(z) = \dfrac{1}{z^5-1}$, f possui singularidade onde $z^5-1=0 \iff z = \sqrt[5]{1} = 1 \cdot e^{i\cdot\frac{2k\pi}{5}}$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} w_0 &= e^0 = 1. \\ w_1 &= e^{\frac{2\pi}{5}i} \\ w_2 &= e^{\frac{4\pi}{5}i} \\ w_3 &= e^{\frac{6\pi}{5}i} \\ w_4 &= e^{\frac{8\pi}{5}i} \end{aligned}\right\}$$

porém, em $D_{\frac{1}{10}}(1)$, a única singularidade no seu interior é $w_0 = 1$.

Assim, pelo T. dos resíduos:

$$\int_{\partial D_{\frac{1}{10}}(1)} f(z)dz = 2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{z=1} f(z).$$

Cálculo do resíduo em $w_0 = 1$: note que

$$f(z) = \frac{1}{z^5 - 1} = \frac{1}{(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)} \; ;$$

$$
\begin{array}{l|l}
z^5 - 1 & z - 1 \\
\hline
-z^5 + z^4 & z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 \\
\hline
z^4 - 1 & \\
-z^4 + z^3 & \\
\hline
z^3 - 1 & \\
-z^3 + z^2 & \\
\hline
z^2 - 1 & \\
-z^2 + z & \\
\hline
z - 1 & \\
-z + 1 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

e então, temos: $w_0 = 1$ um pólo simples; e daí:

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = \lim_{z \to 1} (z-1) f(z) \; ;$$

ou seja:

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = \lim_{z \to 1} (z - \cancel{1}) \cdot \frac{1}{(z - \cancel{1})(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)}$$

$$= \frac{1}{1+1+1+1+1} = \frac{1}{5} \; ;$$

e então:

$$\int_{\partial D_{\frac{1}{4}}(1)} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \left(\operatorname*{Res}_{z=1} f(z)\right) = 2\pi i \cdot \frac{1}{5} = \frac{2\pi}{5} i$$

(c) $\displaystyle\int_{\partial D_1(0)} \frac{e^{z^2}}{z^6}\,dz.$

Seja $f(z) = \dfrac{e^{z^2}}{z^6}$. Então $z_0 = 0$ é um ponto singular de f. Além disso, está no interior de $\partial D_1(0)$. Assim, pelo T. dos resíduos segue que

$$\int_{\partial D_1(0)} \frac{e^{z^2}}{z^6}\cdot dz = 2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=0} f(z).$$

Para calcular o seu resíduo, vamos expandir f(z) em série de Laurent como segue:

$$f(z) = \frac{e^{z^2}}{z^6} = \frac{1}{z^6}\cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n-6}}{n!} =$$

$$= z^{-6} + z^{-4} + \frac{z^{-2}}{2!} + \frac{z^{0}}{3!} + \frac{z^{2}}{4!} + \frac{z^{4}}{5!} + \cdots$$

Neste caso, $\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = a_{-1} = 0$

pois a_{-1} é o coeficiente do fator z^{-1}; mas este está ausente, indicando que $a_{-1} = 0$.

Dessa forma:

$$\int_{\partial D_1(0)} \frac{e^{z^2}}{z^6}\, dz = 2\pi i \cdot 0 = \underline{\underline{0}}$$

9. Sejam f uma função holomorfa numa vizinhança de z_0 e $m \geq 2$ um número inteiro. Prove que

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{(z-z_0)^m}, z_0\right) = \frac{f^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$$

Seja $g(z) := \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^m}$. ; $m \geq 2$.

Então, z_0 é um pólo de ordem m para g

(e z_0 é um zero de ordem m para $\frac{1}{g}$)

Assim,

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} g(z) = \frac{1}{(m-1)!} \cdot \lim_{z\to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left((z-z_0)^m \cdot g(z)\right)$$

$$= \frac{1}{(m-1)!} \cdot \lim_{z\to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left(\cancel{(z-z_0)^m} \cdot \frac{f(z)}{\cancel{(z-z_0)^m}}\right) =$$

$$= \frac{1}{(m-1)!} \cdot \lim_{z\to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(f(z)) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0} f^{(m-1)}(z)$$

$$= \frac{1}{(m-1)!} \cdot f^{(m-1)}(z_0) = \frac{f^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}.$$

11. Mostre que $\text{Res}(f+g, z_0) = \text{Res}(f, z_0) + \text{Res}(g, z_0)$.

Sejam $f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ e

$g(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} b_n (z-z_0)^n$, as

expansões em série de Laurent para f e g no ponto z_0, respectivamente.

Então, temos:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = a_{-1} \quad \text{e} \quad \operatorname*{Res}_{z=z_0} g(z) = b_{-1}.$$

Por outro lado

$f(z)+g(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (a_n+b_n)(z-z_0)^n$; e o

coeficiente de $(z-z_0)^{-1}$ dessa série será $a_{-1}+b_{-1}$.

Ou seja:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}\big(f(z)+g(z)\big) = a_{-1}+b_{-1} = \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=z_0} g(z)$$

17. Integrando a função

$$f(z) = \frac{\cot \pi z}{z^2+1},$$

ao longo do quadrado C_N com vértices em $\pm(N+\frac{1}{2}) \pm (N+\frac{1}{2})i$, mostre que

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} = \pi \coth \pi$$

(Obs.: Assuma que $\int_{C_N} f(z)dz$ tende a zero quando $N \to \infty$, ou prove este fato, se desejardes).

$f(z) = \dfrac{\cot \pi z}{z^2+1}$ tem singularidades em $-i$, i, devido ao denominador, e em pontos da forma $z = n$ (devido ao numerador, pois $\cot \pi n$ não existe) e todos eles pertencem a C_N quando $N \to \infty$; e todos eles são pólos simples. Assim, pelo T. dos resíduos:

$$\int_{C_N} f(z)dz = 2\pi i \cdot \left(\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=-i} f(z) + \sum_{-\infty}^{+\infty} \operatorname*{Res}_{z=n} f(z) \right);$$

onde:

- $\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \lim_{z \to i} (z-i) \cdot f(z) = \lim_{z \to i} \cancel{(z-i)} \cdot \dfrac{\cot \pi z}{(z+i)\cancel{(z-i)}}$

$$= \lim_{z \to i} \frac{\cot \pi z}{z+i} = \frac{\cot \pi i}{2i} = \frac{-\cancel{i} \cdot \coth \pi}{2\cancel{i}} = -\frac{\coth \pi}{2};$$

$\cot(iz) = -i\coth(z)$

$$\bullet \operatorname*{Res}_{z=-i} f(z) = \lim_{z\to -i} (z+i) f(z) = \lim_{z\to -i} (\cancel{z+i}) \cdot \frac{\cot \pi z}{(\cancel{z+i})(z-i)}$$

$$= \lim_{z\to -i} \frac{\cot \pi z}{z-i} = \frac{\cot(-\pi i)}{-2i} = \frac{+\cancel{i}\cdot \coth \pi}{-2\cancel{i}} = -\frac{\coth \pi}{2}.$$

$$\bullet \operatorname*{Res}_{z=n} f(z) = \lim_{z\to n} (z-n) f(z) = \lim_{z\to n} (z-n) \cdot \frac{\cot \pi z}{z^2+1} =$$

$$= \lim_{z\to n} \frac{z-n}{\operatorname{sen} \pi z} \cdot \frac{\cos \pi z}{z^2+1} = \underbrace{\lim_{z\to n} \frac{z-n}{\operatorname{sen} \pi z}}_{\text{L'HOPITAL}} \overset{0/0}{\cdot} \lim_{z\to n} \frac{\cos \pi z}{z^2+1}$$

$$= \lim_{z\to n} \frac{1}{\pi \cdot \cos \pi z} \cdot \lim_{z\to n} \frac{\cos \pi z}{z^2+1} = \frac{1}{\pi \, \cancel{\cos \pi n}} \cdot \frac{\cancel{\cos \pi n}}{n^2+1}$$

$$= \frac{1}{\pi(n^2+1)}.$$

Assim:

$$\underbrace{\int_{C_N} f(z)\,dz}_{\to 0 \text{ quando } N \to \infty} = 2\pi i \cdot \left(\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=-i} f(z) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname*{Res}_{z=n} f(z) \right)$$

$$0 = 2\pi i \cdot \left(-\frac{\coth \pi}{2} - \frac{\coth \pi}{2} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi (n^2+1)} \right)$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \coth \pi + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi (n^2+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1} = \coth \pi$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1} = \pi \cdot \coth \pi}$$