VARIÁVEIS COMPLEXAS

RESOLUÇÃO DE QUESTÕES DA LISTA 14.

3. Ache a ordem do zero $z_0 = 0$ da função $f(z) = 6\,\text{sen}\, z^3 + z^3(z^6 - 6)$.

Expandindo o seno em série de potências, vem:

$$\text{sen}\, z^3 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (z^3)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \, z^{6n+3}}{(2n+1)!}$$

Assim;

$$f(z) = z^3(z^6-6) + 6 \cdot \text{sen}\, z^3 =$$

$$= z^3(z^6-6) + 6 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \, z^{6n+3}}{(2n+1)!} =$$

$$= z^3(z^6-6) + 6 \cdot \left[\frac{z^3}{1!} - \frac{z^9}{3!} + \frac{z^{15}}{5!} - \frac{z^{21}}{7!} + \dots \right]$$

$$= z^9 - 6\cancel{z^3} + 6\cancel{z^3} + 6\left[-\frac{z^9}{3!} + \frac{z^{15}}{5!} - \frac{z^{21}}{7!} + \dots \right]$$

$$= \cancel{z^9} - \cancel{6}\,\frac{\cancel{z^9}}{\cancel{6}} + \frac{z^{15}}{5!} - \frac{z^{21}}{7!} + \frac{z^{27}}{9!} - \dots$$

$$= z^{15} \cdot \underbrace{\left[\frac{1}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \frac{z^{12}}{9!} - \cdots \right]}_{=: g(z)} =$$

$$= (z-0)^{15} \cdot g(z) \, ; \quad \text{onde}$$

$$g(0) = \frac{1}{5!} \neq 0.$$

Portanto, a ordem do zero $z_0 = 0$ é 15.

4. Prove que se f e g forem holomorfas em z_0 e possuírem zeros em z_0 de ordens m e n, respectivamente, então fg será holomorfa em z_0 e este ponto será um zero de ordem $m+n$ para fg.

Seja z_0 zero de f e de g; sendo z_0 zero de ordem m para f e zero de ordem n para g.

Assim:

$$f(z) = (z-z_0)^m \cdot \varphi(z)$$

e

$$g(z) = (z-z_0)^n \cdot \psi(z) \quad ;$$

com $\varphi(z_0) \neq 0$ e $\psi(z_0) \neq 0$.

Então:

$$(f\cdot g)(z) = (z-z_0)^m \cdot \varphi(z) \cdot (z-z_0)^n \cdot \psi(z)$$

$$= (z-z_0)^{m+n} \cdot \varphi(z) \cdot \psi(z)$$

Escrevendo $h(z) = \varphi(z)\cdot\psi(z)$; teremos

$$(f\cdot g)(z) = (z-z_0)^{m+n} \cdot h(z);$$

onde $h(z_0) = \underbrace{\varphi(z_0)}_{\neq 0} \cdot \underbrace{\psi(z_0)}_{\neq 0} \neq 0$

Portanto z_0 é um zero de ordem $m+n$ para $f\cdot g$.

Além disso, $f\cdot g$ é holomorfa pois é um produto de funções holomorfas.

7. De cada função $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ abaixo: (i) obtenha a série de Laurent de f em $z = 0$; (ii) classifique a singularidade em $z = 0$.

(a) $f(z) = \dfrac{e^z}{z^4}$ (b) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z - z}{z^3}$ (c) $f(z) = \dfrac{1}{z^3(z-1)}$

$$(a) \quad f(z) = \frac{e^z}{z^4} = \frac{1}{z^4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} =$$

$$= \frac{1}{z^4} \cdot \left[1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \dots \right]$$

$$= \underbrace{\frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{2 \cdot z^2} + \frac{1}{6z}} + \frac{1}{4!} + \frac{z}{5!} + \frac{z^2}{6!} + \dots$$

Esta série encontrada é a representação em série de Laurent de f. E, como há 4 aditivos com potências negativas de z, então $z_0 = 0$ é um pólo de ordem 4.

b) $$f(z) = \frac{\operatorname{sen} z - z}{z^3} = \frac{1}{z^3} \cdot \operatorname{sen} z - \frac{1}{z^2}$$

$$= \frac{1}{z^3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot z^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{1}{z^2}$$

$$= \frac{1}{z^3}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots \right) - \frac{1}{z^2}$$

$$= \cancel{\frac{1}{z^2}} - \frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \frac{z^4}{7!} + \cdots \cancel{- \frac{1}{z^2}}$$

$$= -\frac{1}{6} + \frac{z^2}{5!} - \frac{z^4}{7!} + \cdots$$

série de Laurent de f.

Como a parte principal é nula (ou seja, não há potências negativas de $z-0$), segue que $z_0 = 0$ é um <u>ponto singular removível</u>.

c) $f(z) = \dfrac{1}{z^3(z-1)}$

Queremos a série de Laurent em $z=0$. Assim:

$$f(z) = \frac{1}{z^3(z-1)} = -\frac{1}{z^3(1-z)} =$$

$$= -\frac{1}{z^3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} z^n = -\sum_{n=0}^{\infty} z^{n-3} =$$

$$= -\left(z^{-3} + z^{-2} + z^{-1} + z^0 + z + z^2 + z^3 + \cdots \right)$$

$$= -\frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - 1 - z - z^2 - z^3 - \cdots ;$$

é a representação em série de Laurent em $z=0$ (e, para convergir, $|z|<1$). Como a parte principal é formada por três potências negativas de z, segue que $z_0=0$ é um

<u>pólo de ordem 3</u>.

9. Prove que se a função f possui z_0 como um pólo de ordem k, então esse mesmo z_0 será um pólo de ordem $k+1$ para f'.

Se z_0 é um pólo de ordem k para f, então, a representação em série de Laurent para f fica na forma:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{k} a_{-n} (z-z_0)^{-k}$$

em um anel $A_{r,R}(z_0)$. Como a convergência será uniforme em $A_{\rho_1,\rho_2}(z_0)$; $r<\rho_1<\rho_2<R$, derivando termo a termo, vem:

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n.a_n (z-z_0)^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} -k.a_{-n}.(z-z_0)^{-k-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n.a_n (z-z_0)^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-k.a_{-n}}{(z-z_0)^{k+1}};$$

ou seja, z_0 será pólo de ordem $k+1$ para f'.