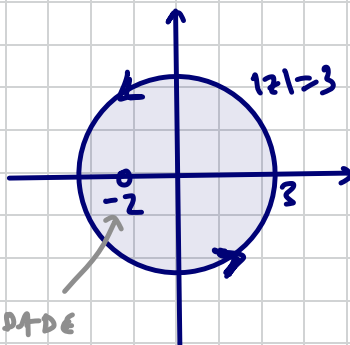


RESOLUÇÃO DE EXERCÍCIOS DA LISTA 10.

2. Use a fórmula integral de Cauchy para calcular cada integral a seguir:

$$\int_{|z|=3} \frac{z^2+1}{z+2} dz, \quad \int_{|z|=1} \frac{e^z dz}{2z+i}, \quad \int_{|z|=2} \frac{\log(z+5) dz}{z^2-2iz+3}.$$

$$\int_{|z|=3} \frac{z^2+1}{z+2} dz.$$



SINGULARIDADE
NO INTERIOR DA CURVA FECHADA.

Seja $g(z) = z^2 + 1.$

Então, pela fórmula integral de Cauchy:

$$\int_{|z|=3} \frac{z^2+1}{z+2} dz = 2\pi i \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=3} \frac{g(z) dz}{z - (-2)}}_{=}$$

$$g(-2) = (-2)^2 + 1 = 5$$

$$= 2\pi i \cdot (5) = 10\pi i$$

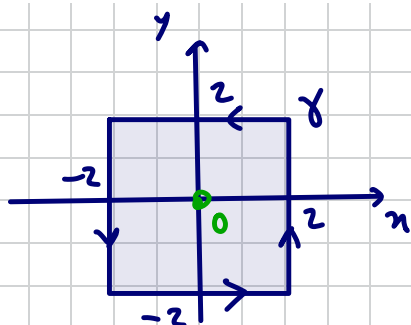
3. Seja γ a fronteira do quadrado de lados sobre as retas $x = \pm 2$ e $y = \pm 2$, orientada no sentido positivo. Calcule as integrais abaixo.

(a) $\int_{\gamma} \frac{e^{-z} dz}{z - \frac{\pi i}{2}}$

(b) $\int_{\gamma} \frac{\cos z dz}{z(z^2 + 8)}$

(c) $\int_{\gamma} \frac{z dz}{2z + 1}$

(Resp.: (a) 2π (b) $\frac{\pi i}{4}$ (c) $-\frac{\pi i}{2}$)



(b) $f(z) = \frac{\cos z}{z(z^2 + 8)}$
 $\uparrow$
 $z=0$ é singularidade no interior de γ .

Use fórmula integral de Cauchy:

$$\int \frac{\cos z}{z(z^2 + 8)} dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\frac{\cos z}{z^2 + 8} = g(z)}{z - 0} dz =$$

onde $g(z) = \frac{\cos z}{z^2 + 8} \Rightarrow g(0) = \frac{\cos 0}{0^2 + 8} = \frac{1}{8}$

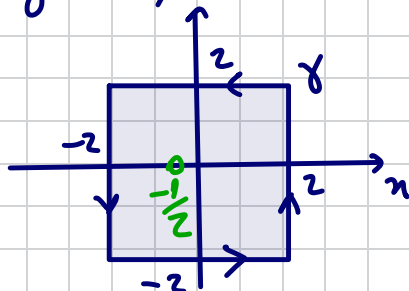
Assim:

$$= 2\pi i \cdot \frac{1}{2\pi i} \cdot \int \frac{g(z) dz}{z - 0} = 2\pi i \cdot \frac{1}{8} = \frac{\pi i}{4}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{= g(0)}$

$$\int_{\gamma} \frac{z dz}{2z+1}$$

$f(z) = \frac{z}{2z+1}$; tem singularidade em $z = -\frac{1}{2}$,
que está no interior de γ .



Então, usando a fórmula integral de Cauchy:

$$\int_{\gamma} \frac{z dz}{2z+1} = \int_{\gamma} \frac{z dz}{2(z + \frac{1}{2})} = \frac{1}{2} \int_{\gamma} \frac{\overset{g(z)}{z} dz}{z - (-\frac{1}{2})}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \cancel{2\pi i} \cdot \frac{1}{\cancel{2\pi i}} \int_{\gamma} \frac{g(z) dz}{z - (-\frac{1}{2})} =$$

$g(z) = z$

$$= g(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$$

$$= \pi i \cdot (-\frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{2} i$$

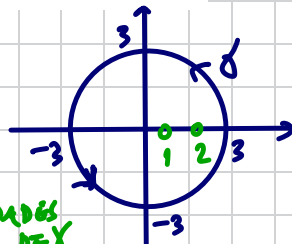
7. Sendo γ a circunferência $|z| = 3$, calcule as integrais

$$\int_{\gamma} \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-1)(z-2)} dz \quad \text{e} \quad \int_{\gamma} \frac{e^{2z} dz}{(z+1)^4}.$$

(Resp.: $4\pi i$ e $\frac{8}{3}\pi i e^{-2}$)

$$\underline{1.º}: \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}.$$

AS DUAS SINGULARIDADES
NO INTERIOR DE γ .



Assim:

$$\frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-1)(z-2)} = (\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2) \cdot \left(\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} \right)$$

$$= \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{z-2} - \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{z-1}$$

Desse, tem-se:

$$\int_{\gamma} \frac{(\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2) dz}{(z-1)(z-2)} = \int_{\gamma} \frac{(\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2) dz}{z-2} - \int_{\gamma} \frac{(\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2) dz}{z-1}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{:=g(z)} \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{:=g'(z)}$

$$= 2\pi i \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(z) dz}{z-2}}_{:=g(z)} - 2\pi i \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g'(z) dz}{z-1}}_{:=g'(z)} =$$

$$= 2\pi i \cdot g(2) - 2\pi i \cdot g(1)$$

$$= 2\pi i \cdot \left(\underbrace{\sin 4\pi}_{=0} + \underbrace{\cos 4\pi}_{=1} \right) - 2\pi i \cdot \left(\underbrace{\sin \pi}_{=0} + \underbrace{\cos \pi}_{=-1} \right)$$

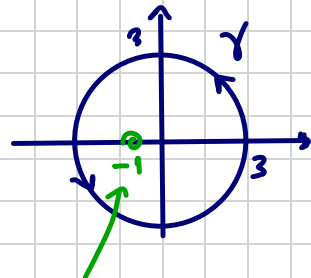
$$= 2\pi i (0+1) - 2\pi i (0-1) = 2\pi i + 2\pi i = \underline{\underline{4\pi i}}$$

Ex 2:

$$\int_{\gamma} \frac{e^{z^2} dz}{(z+1)^4}$$

VAMOS USAR A
FÓRMULA
GENRAL
DE CAUCHY.

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z) dz}{(z-z_0)^{n+1}}$$



$z = -1$: singularidade
dentro da curva
fechada γ .

$$\int_{\gamma} \frac{e^{z^2} dz}{(z+1)^4} = \frac{2\pi i}{3!} \cdot \frac{3!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z) dz}{[z-(-1)]^{3+1}} = \frac{2\pi i}{3!} f^{(3)}(-1)$$

$$\text{onde } f(z) = e^{2z} \Rightarrow f'(z) = 2 \cdot e^{2z} \Rightarrow f''(z) = 4 \cdot e^{2z} \\ \Rightarrow f^{(3)}(z) = 8 \cdot e^{2z}$$

Então:

$$\int_{\gamma} \frac{e^{2z} dz}{(z+1)^4} = \frac{2\pi i}{3!} f^{(3)}(-1) = \frac{2\pi i}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 8 e^{2 \cdot (-1)} = \frac{8\pi e^{-2}}{3} i$$

10. Calcule $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2\left(\frac{\pi}{6} + 2e^{i\theta}\right) d\theta$

(Resp.: $\frac{1}{4}$)

Seja T.V.M de Gauss;

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta ;$$

famosos $r=2$; $z_0 = \frac{\pi}{6}$ e $f(z) = \sin^2 z$;

e então

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2\left(\frac{\pi}{6} + 2e^{i\theta}\right) d\theta = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

13. Use a fórmula geral de Cauchy para calcular

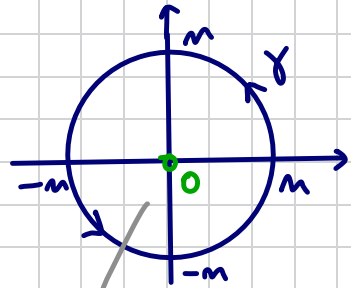
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=n} \frac{e^z}{z^{n+1}} dz, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Em seguida, use o resultado obtido para provar que $n! \geq n^n e^{-n}$.

Use a fórmula geral de Cauchy:

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|z|=n} \frac{f(z) dz}{(z-0)^{n+1}};$$

onde $f(z) = e^z \Rightarrow f^{(n)}(z) = e^z$.



$z=0$: singularidade no interior de γ .

Disso, teremos:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=n} \frac{e^z}{z^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{e^0}{n!} = \frac{1}{n!}$$

Assim:

$$\frac{1}{n!} = \left| \frac{1}{n!} \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=n} \frac{e^z dz}{z^{n+1}} \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{|z|=n} \frac{|e^z| \cdot |dz|}{|z|^{n+1}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=n} \frac{e^{|z|}}{|z|^{n+1}} |dz|$$

$|e^z| = |e^{x+iy}| = e^x \Rightarrow e^{|z|} = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$; e como $\sqrt{x^2+y^2} \geq x$; e a exponencial real é crescente, segue que $|e^z| \leq e^{|z|}$.

Então: $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=n} \frac{e^{|z|}}{|z|^{n+1}} |dz|$, e como $|z|=n$,

segue que:

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=n} \frac{e^n}{n^{n+1}} |dz| = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{e^n}{n^{n+1}} \int_{|z|=n} |dz| =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{e^n}{n^{n+1}} \cdot 2\pi \cdot n = \frac{e^n}{n^n}$$

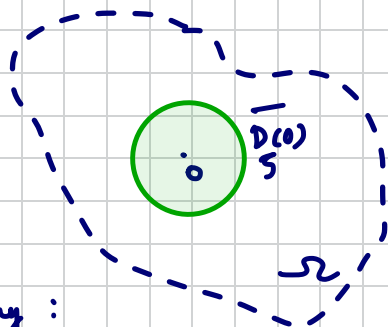
$$\Rightarrow \frac{1}{n!} \leq \frac{e^n}{n^n} \Rightarrow$$

$$n! \geq \frac{n^n}{e^n}$$

16. Seja Ω um aberto e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ uma função complexa infinitamente derivável. Suponha que o disco $D_5(0)$ e sua fronteira estejam contidos em Ω . Suponha também que $|f(z)| \leq 7, \forall z \in \partial D_5(0)$. Determine um limitante $M > 0$ para que $|f'''(2i)| \leq M$.
(Resp.: $\frac{70}{27}$.)

$$\overline{D_5(0)} \subset \Omega.$$

$$|f(z)| \leq 7, \forall z \in \partial D_5(0).$$



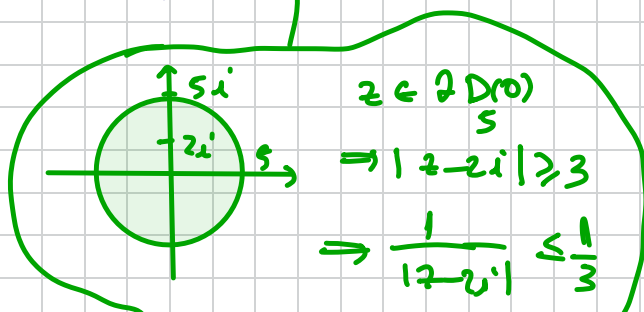
Usa fórmula geral de Cauchy:

$$f'''(2i) = \frac{3!}{2\pi i} \int_{\partial D_5(0)} \frac{f(z) dz}{(z-2i)^4};$$

e então:

$$\underline{|f'''(2i)|} = \left| \frac{6}{2\pi i} \int_{\partial D_5(0)} \frac{f(z) dz}{(z-2i)^4} \right| \leq$$

$$\leq \frac{3}{\pi} \int_{\partial D_5(0)} \frac{|f(z)| \cdot |dz|}{|z-2i|^4} \leq$$



$$\leq \frac{3}{\pi} \int_{\partial D(0, \frac{5}{3})} \frac{7 \cdot |dz|}{(3)^4} = \frac{7}{3^3 \cdot \pi} \cdot \int_{\partial D(0, \frac{5}{3})} |dz| =$$

$$= \frac{7}{2\pi \cdot 3^3} \cdot 2\pi \cdot \left(\frac{5}{3}\right) = \frac{70}{27}$$

$$\Rightarrow |f'''(2i)| \leq \frac{70}{27}$$

17. Seja f uma função inteira satisfazendo $|f(z)| \leq |z|^2$, para todo $z \in \mathbb{C}$. Mostre que $f(z) = az^2$, para alguma constante complexa a satisfazendo $|a| \leq 1$ (Sugestão mostre que $f'''(z) = 0, \forall z$).

Tomemos que $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Seja $R > 0$ e considere $D = D_R(0)$. Como f é inteira, então f''' também é inteira. Pela fórmula geral de Cauchy para $f'''(0)$, temos:

$$f'''(0) = \frac{3!}{2\pi i} \int_{\partial D_R(0)} \frac{f(z) dz}{(z-0)^4} ; \quad \forall z \in \partial D_R(0).$$

Então:

$$|f'''(0)| = \left| \frac{6}{2\pi} \int_{\partial D(0)_R} \frac{f(z) dz}{z^4} \right| \leq \frac{3}{\pi} \int_{\partial D(0)_R} \frac{|f(z)| \cdot |dz|}{|z|^4} \leq$$

$$\leq \frac{3}{\pi} \int_{\partial D(0)_R} \frac{\cancel{|z|^2} \cdot |dz|}{|z|^{\cancel{4}2}} = \frac{3}{\pi} \int_{\partial D(0)_R} \frac{|dz|}{|z|^2};$$

$|f(z)| \leq |z|^2$
por hipótese

e como $z \in \partial D(0)_R$; temos que $|z| = R$. Assim:

$$|f'''(0)| \leq \frac{3}{\pi} \int_{\partial D(0)_R} \frac{|dz|}{|z|^2} = \frac{3}{\pi} \int_{\partial D(0)_R} \frac{|dz|}{R^2} =$$

$$= \frac{3}{\pi R^2} \int_{\partial D(0)_R} |dz| = \frac{3}{\pi R^2} \cdot 2\pi R = \frac{6}{R}$$

Então: $|f'''(0)| \leq \frac{6}{R}$. Como queremos em todo o plano complexo $\mathbb{C}$; fazendo $R \rightarrow \infty$; temos

$$\lim_{R \rightarrow \infty} |f'''(0)| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{6}{R} = 0 \Rightarrow f'''(0) = 0;$$

e como f''' é inteira, e vale zero em um ponto ($f'''(0)=0$); concluímos que $f'''(z)=0$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

Logo, $f(z) = az^2 + bz + c$; com $a, b, c \in \mathbb{C}$ constantes.

Quando $z=0$, teremos

$$f(0) = c. \quad \text{e, como } |f(z)| \leq |z|^2;$$

então ;

$$|c| = |f(0)| \leq |0|^2 = 0$$

$$\rightarrow \boxed{c=0}$$

Primo, obtenemos que $f(z) = az^2 + bz$. Assim:

$$|f(z)| = |bz + az^2|$$

$$\Rightarrow \underline{|z|^2} \geq |f(z)| = |bz + az^2| \geq \underline{|bz| - |az^2|}$$

$$\Rightarrow |z|^2 + |a| \cdot |z|^2 \geq |b| \cdot |z|$$

$$\Rightarrow |z|^{\cancel{2}} (1 + |a|) \geq |b| \cdot \cancel{|z|}$$

$$\Rightarrow |b| \leq (1 + |a|) |z|$$

Esta desigualdade deve valer $\forall z \in \mathbb{C}$; Então,
 $\forall \varepsilon > 0$, tal que $|z| < \varepsilon$, teremos

$$|b| \leq (1 + |a|) \cdot |z| < (1 + |a|) \cdot \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Também, devemos ter $\boxed{b=0}$

conclusão; $f(z) = az^2$; e além disso,

$$|f(z)| = |az^2| = |a| \cdot |z|^2; \text{ e sendo}$$

$$|f(z)| \leq |z|^2, \text{ por hipótese, então:}$$

$$|a| \cdot |z|^2 = |f(z)| \leq |z|^2$$

$$\Rightarrow |a| \cdot \cancel{|z|^2} \leq \cancel{|z|^2} \Rightarrow |a| \leq 1.$$

Conclusão; devemos ter $f(z) = az^2$, com $|a| \leq 1$.

18. Seja f uma função inteira tal que $|f(z)| \leq n^{\frac{3}{4}}$ quando $|z| = n$, $n \in \mathbb{N}$. Prove que f é uma função constante.

Considere $D(0)$ o disco centrado em 0 e raio $n \in \mathbb{N}$. Pela fórmula geral de Cauchy:

$$\begin{aligned}
 |f'(0)| &= \left| \frac{f!}{2\pi i} \cdot \int_{\partial D(0)} \frac{f(z) dz}{(z-0)^2} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D(0)} \frac{|f(z)| \cdot |dz|}{|z|^2} \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D(0)} \frac{n^{\frac{3}{4}} \cdot |dz|}{n^2} \\
 &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D(0)} \frac{n^{\frac{3}{4}} \cdot |dz|}{n^2} = \frac{1}{2\pi} \cdot n^{\frac{3}{4}-2} \cdot \int_{\partial D(0)} |dz| = \\
 &= \frac{1}{2\pi \cdot n^{\frac{5}{4}}} \cdot 2\pi \cdot n = \frac{n}{n^{\frac{5}{4}}} = n^{1-\frac{5}{4}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{n}}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |f'(0)| \leq \frac{1}{\sqrt[4]{n}} \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty$$

Logo, $f'(0) = 0$.

Como f é inteira, então, f' também é inteira; e como $f'(0) = 0$; concluímos que $f'(z) = 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$. Logo, $f(z) = c$; onde c é uma constante complexa.

19. Seja $\beta \in \mathbb{C}$. Mostre que para todo $n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, tem-se

$$\left(\frac{\beta^n}{n!}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_1(0)} \frac{\beta^n e^{\beta z}}{n! z^{n+1}} dz.$$

Seja $f(z) = e^{\beta z}$. Pela fórmula geral de Cauchy:

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D_1(0)} \frac{e^{\beta z} dz}{(z-0)^{n+1}}$$

Como $f^{(n)}(z) = \beta^n e^{\beta z}$, temos: $f^{(n)}(0) = \beta^n \cdot e^0 = \beta^n$

$$\Rightarrow \beta^n = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D_1(0)} \frac{e^{\beta z} dz}{z^{n+1}}$$

$$\Rightarrow \frac{\beta^n}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_1(0)} \frac{e^{\beta z} dz}{z^{n+1}}$$

Multiplicando por $\frac{\beta^n}{n!}$, vem:

$$\frac{\beta^n}{n!} \cdot \frac{\beta^n}{n!} = \frac{\beta^n}{n!} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_1(0)} \frac{e^{\beta z} dz}{z^{n+1}}, \text{ ou seja:}$$

$$\left(\frac{\beta^n}{n!}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_1(0)} \frac{\beta^n e^{\beta z}}{n! z^{n+1}} dz.$$

22. Mostre que as derivadas sucessivas de uma função holomorfa em um ponto nunca satisfazem a desigualdade $|f^{(n)}(z)| > n!n^n$.

De la desigualdade de Cauchy, temos que

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n! M}{R^n}, \text{ onde}$$

$$M = \max_{|z|=R} |f(z)|.$$

Por absurdo, suponha que $|f^{(n)}(z)| > n!n^n$.

Então, teremos:

$$n!n^n < |f^{(n)}(z)| \leq \frac{n! M}{R^n}$$

$$\Rightarrow \cancel{n!} n^n < \frac{\cancel{n!} M}{R^n} \Rightarrow n^n < \frac{M}{R^n};$$

$$\text{ou seja; } n^n < M \cdot \left(\frac{1}{R}\right)^n; \text{ mas}$$

isso é um absurdo se tivermos $0 < R < 1$.

25. Suponha que f seja uma função inteira tal que $f(0) = 0$ e $|f(z) - e^z \cos z| \leq 5$, para todo $z \in \mathbb{C}$. Encontre uma fórmula para f .

Seja hipótese temos que

$$f(0) = 0 \quad \text{e} \quad |f(z) - e^z \cos z| \leq 5, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Defina $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ por:

$$g(z) = f(z) - e^z \cos z. \quad \text{Então, } |g(z)| \leq 5.$$

Seja desigualdade de Cauchy:

$$|g'(z)| \leq \frac{M \cdot n!}{R^n} = \frac{5 \cdot n!}{R^n} \rightarrow 0 \quad \text{quando } R \rightarrow \infty$$

Então, $g'(z) = 0$, e logo, $g(z) = \text{constante}$.

Assim, $\exists \beta \in \mathbb{C}$ tal que $g(z) = \beta$; ou seja,
$$\beta = f(z) - e^z \cos z$$

Logo, $f(z) = e^z \cos z + \beta$; e como $f(0) = 0$;

$$\text{teremos} \quad 0 = f(0) = \underbrace{e^0 \cos 0}_1 + \beta \Rightarrow \beta = -1$$

Logo, concluímos que

$$f(z) = e^z \cos z - 1$$

é a função procurada.