VARIÁVEIS COMPLEXAS – RESOLUÇÃO DE ALGUMAS QUESTÕES DA LISTA 11.

2. Mostre que a sequência $f_n(z) = \dfrac{z}{n^2}$ converge uniformemente para $f \equiv 0$ em $|z| \leq R$, $\forall R > 0$, mas que não converge uniformemente em todo o plano complexo.

Dado $\varepsilon > 0$, e considere, para $R > 0$ fixado, o número real $\sqrt{\frac{\varepsilon}{R}}$. Então, pela propriedade arquimediana em $\mathbb{R}$, segue que $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{n_0} < \sqrt{\frac{\varepsilon}{R}} .$$

Assim, $\forall\, n \geq n_0$, tem-se:

$$|f_n(z) - 0| = |f_n(z)| = \left|\frac{z}{n^2}\right| = \frac{|z|}{n^2} \leq \frac{|z|}{n_0^2}$$

E, como $|z| \leq R$; segue que

$$|f_n(z) - 0| \leq \frac{|z|}{n_0^2} \leq \frac{R}{n_0^2} < \left(\cancel{\sqrt{\frac{\varepsilon}{R}}}\right)^{\cancel{2}} \cdot R$$

$$= \frac{\varepsilon}{\cancel{R}} \cdot \cancel{R} = \varepsilon .$$

Ou seja, $f_n(z) \rightrightarrows 0$.

<u>AF.:</u> $f_n(z) \not\rightrightarrows 0$ em todo o plano complexo.

Em particular, tome $\varepsilon = 1 > 0$.

Se a convergência fosse uniforme em todo o $\mathbb{C}$, então, existiria um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq n_0$, e $\forall z \in \mathbb{C}$, teríamos

$$|f_n(z)| < 1.$$

Porém, tomando, por exemplo, $z = 2n^2$ vamos obter:

$$|f_n(z)| = |f_n(2n^2)| = \left|\frac{2\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}}\right| = 2 > 1 = \varepsilon.$$

Portanto, a convergência não é uniforme em todo o $\mathbb{C}$.

6. Prove que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ é uniformemente convergente no disco fechado $|z| \leq 1$ e divergente fora desse disco.

AF-01: A série $\sum \frac{z^n}{n^2}$ conv. uniformem. em $|z| \leq 1$:

Considere $\sum_{n \geq 1}^{\infty} f_n(z)$; onde $f_n(z) = \frac{z^n}{n^2}$.

Temos que:

(i) $|f_n(z)| = \left| \frac{z^n}{n^2} \right| = \frac{|z|^n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} := M_n$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \sum_{n \geq 1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge (p-série, com $p = 2 > 1$)

Logo, pelo teste M de Weierstrass, segue a convergência da série dada.

AF-02: a série $\sum \frac{z^n}{n^2}$ diverge em $|z| > 1$.

De fato, basta observar que o seu termo geral $\left| \frac{z^n}{n^2} \right| = \frac{|z|^n}{n^2} \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$ (pois $|z| > 1$)

Então, a série diverge.

10. A *função zeta de Riemann* é definida por[1] $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ (ramo principal de n^z)

(a) Seja $\delta > 1$ um número real positivo. Mostre que a série converge uniformemente em todo semiplano $H_\delta = \{z : \Re(z) \geq \delta > 1\}$.

(b) Conclua que $\zeta(z)$ é holomorfa no semi-plano $H = \{z : \Re(z) > 1\}$.

(c) O que é $\zeta'(z)$?

(a) Sendo $f_n(z) = \frac{1}{n^z} = n^{-z} = e^{-z \log n} =$

$$= \underbrace{e^{-x \log n}}_{\rho} \cdot e^{-iy \log n}$$

$$\Rightarrow |f_n(z)| = \left|\frac{1}{n^z}\right| = e^{-x \log n} = e^{\log n^{-x}} = \frac{1}{n^x}$$

Assim, se $\mathrm{Re}(z) > 1$, teremos:

- $|f_n(z)| = \frac{1}{n^x} := M_n$.

- $\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$, $x > 1$; que é uma p-série, com $p > 1$; logo, convergente.

Então, pelo teste M de Weierstrass, segue a converg. uniforme da série em H_δ.

(b) Note que cada função $f_n(z) = \frac{1}{n^z}$ é holomorfa em H_δ; pois no ramo principal de n^z, temos

$$\frac{1}{n^z} = e^{-z\log n},$$

que é holomorfa (a exponencial é holomorfa); e isso, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Como, pelo item (a), $\zeta(z)$ converge uniformemente em H_δ, segue pelo T. de Weierstrass que $\zeta(z)$ é holomorfa nesse semiplano.

(c) Devido à convergência uniforme em H_δ, podemos derivar sob o somatório.

$$\zeta'(z) = \frac{d}{dz}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dz}\left(n^{-z}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} -n^{-z}\cdot \ln n = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^z}$$

ESSA REGRA DE DERIVAÇÃO NÃO FOI DEDUZIDA EM AULA, MAS SEGUE A MESMA FÓRMULA DO CASO REAL

11. Prove que se a série $\sum_{n=1}^{\infty} |g_n(z)|$ é uniformemente convergente em um conjunto Ω e se $|f_n(z)| \leq |g_n(z)|$, $\forall z \in \Omega$ e para todo n suficientemente grande, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ é uniformemente convergente em Ω.

Suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} |g_n(z)|$ converge uniformemente em Ω.

Dada $(f_n(z))_n$ seq. tal que $|f_n(z)| \leq |g_n(z)|$, $\forall z \in \Omega$ e $\forall n \in \mathbb{N}$; n grande.

Vamos mostrar que $\sum f_n(z)$ conv. unif. em Ω.

Como $\sum_{n=1}^{\infty} |g_n(z)|$ converge unif. em Ω, então, o teste M de Weierstrass se aplica para esta série.

Assim, $\exists\, (M_n) \subset \mathbb{R}$ seq. tal que

•) $|g_n(z)| \leq M_n$, $\forall n$;

••) $\sum M_n$ converge.

Como $|f_n(z)| \leq |g_n(z)| \leq M_n$; e

$\sum M_n$ converge, então pelo teste M de Weierstrass segue também a convergência uniforme da série $\sum f_n(z)$.

$\square$

---

13. Seja $(a_n) \subset \mathbb{C}$ uma sequência complexa tal que $|a_n| < \dfrac{M}{R^n}$, onde $M > 0$; $n = 0, 1, 2, 3, ...$; $R > 0$. Prove que a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ é convergente e determine o seu raio de convergência.

Note que, observando a série dos módulos

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| \; ;$$

temos que

$$|f_n(z)| = |a_n| \cdot |z|^n < \frac{M}{R^n} \cdot |z|^n = M \cdot \left(\frac{|z|}{R}\right)^n$$

Assim, se $|z| < R$, teremos

$$\cdot\ |f_n(z)| < M \cdot \underbrace{\left(\frac{|z|}{R}\right)}_{<1}^n := M_n \; ;$$

e sendo $M \sum \left(\frac{|z|}{R}\right)^n$; com $|z|<R$ série geométrica com $\frac{|z|}{R}<1$, será convergente;

e então pelo T. M de Weierstrass, a série $\sum a_n z^n$ converge uniformemente em $|z|\le r<R$

O raio de convergência é dado por:

$$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \; ;$$

e como $|a_n| \le \frac{M}{R^n}$; obtemos:

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} \le M^{\frac{1}{n}}\cdot\left(\frac{1}{R^n}\right)^{\frac{1}{n}} = M^{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{R}$$

$$\Rightarrow \frac{R}{\sqrt[n]{M}} \le \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{R}{\sqrt[n]{M}}}_{R} \le \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} = \rho$$

$$\Longrightarrow \boxed{R \leq \rho}$$

Assim, a série converge em $|z| < R$ e seu raio de convergência ρ é tal que $\rho \geqslant R$.