

**Universidade Federal de Pelotas**  
**Departamento de Matemática e Estatística**  
**Curso de Licenciatura em Matemática - Noturno**  
**Terceira Prova de Funções Transcendentais**  
**Prof. Dr. Maurício Zahn**

Nome:

Data: 20/08/2025.

**Instrução:** Escolha questões de sua preferência para resolver, até computar 10,0 pontos, sendo que 5,0 pontos devem estar distribuídos na PARTE I e 5,0 pontos na PARTE II, assinalando suas escolhas nesta folha de questões no espaço [   ].

===== PARTE I =====

[   ] **Questão 01 (2,0 pontos)** Resolva as inequações:

(a)  $3^{2x} - 3^{x+1} > 3^x - 3$

(b)  $\log_{\frac{1}{2}}(3+x) + \log_{\frac{1}{2}} 2 > -2$

Solução: (a)

$$3^{2x} - 3^{x+1} > 3^x - 3$$

Substitua  $t = 3^x$  ( $t > 0$ ):

$$t^2 - 3t > t - 3 \implies t^2 - 4t + 3 > 0 \implies (t-1)(t-3) > 0.$$

Soluções em  $t$ :  $t < 1$  ou  $t > 3$ . Voltando para  $x$  (função estritamente crescente):

$$3^x < 1 \iff x < 0, \quad 3^x > 3 \iff x > 1.$$

Logo

$(-\infty, 0) \cup (1, \infty).$

(b)

1. Usar a propriedade de soma de logaritmos:

$$\log_{\frac{1}{2}}(3+x) + \log_{\frac{1}{2}} 2 = \log_{\frac{1}{2}}[2(3+x)] = \log_{\frac{1}{2}}(6+2x)$$

Portanto a inequação vira:

$$\log_{\frac{1}{2}}(6+2x) > -2$$

—

2. Lembrando que  $\log_a y$  com  $0 < a < 1$  é decrescente, então a inequação se inverte ao eliminar o logaritmo:

$$6+2x < \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

$$6+2x < 4$$

$$2x < -2 \implies x < -1$$

---

3. Condição de existência:  $3 + x > 0 \implies x > -3$

---

4. Intervalo solução:

$$\boxed{-3 < x < -1}$$

[ ] **Questão 02 (1.0 ponto)** As indicações  $R_1$  e  $R_2$ , na *escala Richter*, de dois terremotos estão indicados pela fórmula

$$R_1 - R_2 = \log \frac{E_1}{E_2},$$

onde  $E_1$  e  $E_2$  medem a energia liberada pelos terremotos sob a forma de ondas que se propagam pela crosta terrestre.

A tabela abaixo mostra algumas medidas, onde alguns dados estão faltando. Complete a tabela, de acordo com as definições dadas e seus conhecimentos.

| $R_1$ | $R_2$ | $E_1$ | $E_2$ |
|-------|-------|-------|-------|
| 8     | 6     | 10    |       |
| 5     | 7     |       | 13    |
|       | 9     | 2     | 20    |
| 7     | 7     | 10    | 10    |

Solução. Dado que a escala Richter satisfaz:

$$R_1 - R_2 = \log \frac{E_1}{E_2}$$

podemos resolver cada célula da tabela usando a propriedade de logaritmo:

$$\log \frac{E_1}{E_2} = R_1 - R_2 \implies \frac{E_1}{E_2} = 10^{R_1 - R_2} \implies E_1 = E_2 \cdot 10^{R_1 - R_2}, \quad E_2 = \frac{E_1}{10^{R_1 - R_2}}$$

---

**\*\*Linha 1:\*\***  $R_1 = 8, R_2 = 6, E_1 = 10, E_2 = ?$

$$\log \frac{10}{E_2} = 8 - 6 = 2 \implies \frac{10}{E_2} = 10^2 = 100 \implies E_2 = \frac{10}{100} = 0,1$$

---

**\*\*Linha 2:\*\***  $R_1 = 5, R_2 = 7, E_1 = ?, E_2 = 13$

$$\log \frac{E_1}{13} = 5 - 7 = -2 \implies \frac{E_1}{13} = 10^{-2} = 0,01 \implies E_1 = 13 \cdot 0,01 = 0,13$$

---

**\*\*Linha 3:\*\***  $R_1 = ?, R_2 = 9, E_1 = 2, E_2 = 20$

$$\log \frac{2}{20} = \log 0,1 = -1 \implies R_1 - 9 = -1 \implies R_1 = 8$$

---

**\*\*Linha 4:\*\***  $R_1 = 7, R_2 = 7, E_1 = 10, E_2 = 10$

$$\log \frac{10}{10} = 0 = 7 - 7$$

---

**\*\*Tabela completa:\*\***

| $R_1$ | $R_2$ | $E_1$ | $E_2$ |
|-------|-------|-------|-------|
| 8     | 6     | 10    | 0,1   |
| 5     | 7     | 0,13  | 13    |
| 8     | 9     | 2     | 20    |
| 7     | 7     | 10    | 10    |

[ ] **Questão 03 (1.5 ponto)** Esboce o gráfico da função  $f : \mathbb{R} \rightarrow (2, +\infty)$  dada por

$$f(x) = 2 + 2^{1-x},$$

indicando o domínio e a imagem. Em seguida, conclua que  $f$  é inversível, e obtenha sua inversa  $f^{-1}$ , esboçando também o seu gráfico.

**Solução.** Dada a função:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow (2, +\infty), \quad f(x) = 2 + 2^{1-x}$$

---

1. **\*\*Domínio e imagem\*\***

- O domínio é  $D_f = \mathbb{R}$ , pois  $2^{1-x}$  está definido para todo  $x \in \mathbb{R}$ . - A imagem:  $2^{1-x} > 0 \implies f(x) = 2 + 2^{1-x} > 2$ . Portanto,  $Im(f) = (2, +\infty)$ .

---

2. **\*\*Esboço do gráfico de  $f$ \*\***

- Para  $x \rightarrow +\infty$ :  $2^{1-x} \rightarrow 0 \implies f(x) \rightarrow 2^+$  - Para  $x \rightarrow -\infty$ :  $2^{1-x} \rightarrow +\infty \implies f(x) \rightarrow +\infty$  - Como  $2^{1-x}$  diminui quando  $x$  aumenta, a função  $f$  também diminui, ou seja, é estritamente decrescente.

O gráfico é uma curva decrescente que se aproxima de  $y = 2$  para  $x \rightarrow +\infty$  e cresce indefinidamente para  $x \rightarrow -\infty$ .

---

3. **\*\*Inversibilidade\*\***

-  $f$  é estritamente decrescente, logo é injetora. - Como o domínio é  $\mathbb{R}$  e a imagem é  $(2, +\infty)$ ,  $f$  é bijetora, portanto é inversível.

---

4. **\*\*Encontrar a função inversa  $f^{-1}$ \*\***

$$y = 2 + 2^{1-x} \implies y - 2 = 2^{1-x}$$

Tomando logaritmo na base 2:

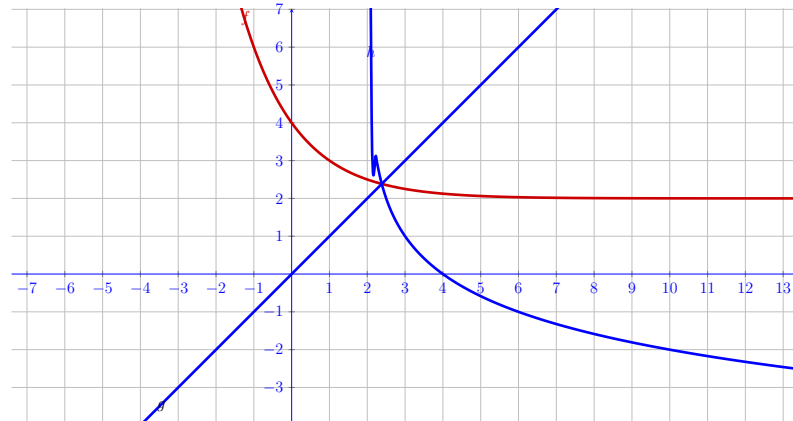
$$\log_2(y - 2) = 1 - x \implies x = 1 - \log_2(y - 2)$$

Portanto:

$$f^{-1}(x) = 1 - \log_2(x - 2), \quad x \in (2, +\infty)$$

5. \*\*Esboço do gráfico da inversa\*\*

- O gráfico de  $f^{-1}$  é o reflexo do gráfico de  $f$  em relação à reta  $y = x$ . - Domínio de  $f^{-1}$ :  $(2, +\infty)$  - Imagem de  $f^{-1}$ :  $\mathbb{R}$



\*\*Resumo final:\*\*

$$f(x) = 2 + 2^{1-x}, \quad D_f = \mathbb{R}, \quad Im(f) = (2, +\infty)$$

$$f^{-1}(x) = 1 - \log_2(x - 2), \quad D_{f^{-1}} = (2, +\infty), \quad Im(f^{-1}) = \mathbb{R}$$

[ ] **Questão 04 (1.0 ponto)** Um ângulo central de um círculo de raio 30 cm intercepta um arco de 6 cm. Determine a medida do ângulo central  $\alpha$  em radianos e em graus. Determine também a área do setor circular subtendido pelo arco.

Solução. Dado: raio  $r = 30$  cm, arco  $s = 6$  cm

1. Medida do ângulo central em radianos:

Relação entre arco e ângulo central:  $s = r\alpha \implies \alpha = s/r$

$$\alpha = 6/30 = 0,2 \text{ rad}$$

2. Conversão para graus:  $1 \text{ rad} = 180/\pi \text{ graus}$

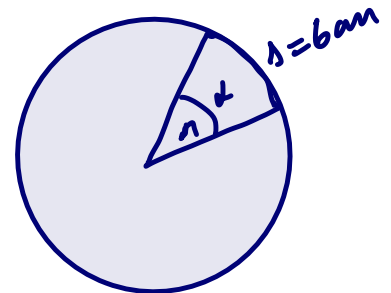
$$\alpha = 0,2 \cdot 180/\pi \approx 11,46^\circ$$

3. Área do setor circular:  $A = (1/2)r^2\alpha$

$$A = (1/2) \cdot 30^2 \cdot 0,2 = (1/2) \cdot 900 \cdot 0,2 = 90 \text{ cm}^2$$

Portanto:

$$\alpha = 0,2 \text{ rad} \approx 11,46^\circ, A = 90 \text{ cm}^2$$



[ ] **Questão 05 (1.5 ponto)** Dado  $x$  um arco do primeiro quadrante, simplifique a expressão:

$$y = \frac{\csc(180^\circ + x) + \sec(90^\circ + x)}{\cot(270^\circ - x) - \tan(270^\circ + x)}$$

Solução. 1. Reduzir os arcos usando identidades trigonométricas:

-  $\csc(180^\circ + x) = -\csc x$  (seno negativo no terceiro quadrante) -  $\sec(90^\circ + x) = -\csc x$  (cosseno negativo no segundo quadrante transformado em csc)

Portanto o numerador:

$$\csc(180^\circ + x) + \sec(90^\circ + x) = -\csc x + (-\csc x) = -2 \csc x$$

—

2. Reduzir o denominador:

-  $\cot(270^\circ - x) = \tan x$  (cotangente no quarto quadrante) -  $\tan(270^\circ + x) = \cot x$  (tangente no terceiro quadrante transformada em cotangente)

Portanto o denominador:

$$\cot(270^\circ - x) - \tan(270^\circ + x) = \tan x - (-\cot x) = \tan x + \cot x$$

—

3. Substituir seno e cosseno em  $\tan x + \cot x$ :

$$\tan x + \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin x \cos x}$$

—

4. Numerador em termos de  $\sin x$ :

$$-2 \csc x = -2 \frac{1}{\sin x} = -\frac{2}{\sin x}$$

—

5. Dividir numerador pelo denominador:

$$y = \frac{-2/\sin x}{1/(\sin x \cos x)} = -2 \cos x$$

—

**\*\*Resultado final simplificado:\*\***

$$\boxed{y = -2 \cos x}$$

===== PARTE II =====

[ ] **Questão 06 (1.5 ponto)** Um barco navega seguindo uma trajetória retilínea e paralela à costa. Num certo momento, um coqueiro situado na costa da praia é visto do barco sob um ângulo de  $15^\circ$  com a trajetória. Navegando mais 500 m o coqueiro fica posicionado na linha perpendicular à trajetória do barco. Qual a distância do barco à costa?

**Solução.** Dado: um barco navega paralelo à costa. Um coqueiro é visto sob um ângulo de  $15^\circ$ . Após navegar 500 m, o coqueiro está na linha perpendicular à trajetória. Determinar a distância do barco à costa, d.

1. Modelo geométrico:

Formamos um triângulo retângulo, com:

- d = distância do barco à costa (altura do triângulo) - 500 m = deslocamento do barco ao longo da costa (base do triângulo) -  $\alpha = 15^\circ$  ângulo observado inicialmente

Relação trigonométrica:

$$\tan 15^\circ = \frac{d}{500}$$

2. Cálculo da tangente de 15 graus usando a fórmula de diferença de ângulos notáveis:

$$15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$$

Substituindo  $a = 45^\circ$  e  $b = 30^\circ$ :

$$\tan 15^\circ = \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \cdot \tan 30^\circ} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$$

Racionalizando o denominador:

$$\tan 15^\circ = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$$

3. Determinação da distância do barco à costa:

$$\tan 15^\circ = \frac{d}{500} \implies d = 500 \cdot (2 - \sqrt{3})$$

4. Resultado numérico aproximado:

$$d \approx 500 \cdot 0,268 \approx 134 \text{ m}$$

Portanto, a distância do barco à costa é:

$$d = 500(2 - \sqrt{3}) \approx 134 \text{ m}$$

[ ] **Questão 07 (1,5 pontos)** Sabendo que  $\alpha + \beta = 210^\circ$ ,  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ ,  $0^\circ < \beta < 90^\circ$  e que  $\sec \beta = 4$ , determine o valor de  $\sin \alpha$ .

**Solução.** Dado:  $\alpha + \beta = 210^\circ$ ,  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ ,  $0^\circ < \beta < 90^\circ$ , e  $\sec \beta = 4$ . Determinar  $\sin \alpha$ .

1. Determinar  $\cos \beta$  a partir de  $\sec \beta$ :

$$\sec \beta = \frac{1}{\cos \beta} \implies \cos \beta = \frac{1}{\sec \beta} = \frac{1}{4}$$

2. Determinar  $\sin \beta$  usando o teorema de Pitágoras:

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{15}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

3. Usar a relação  $\alpha + \beta = 210^\circ$ :

$$\alpha = 210^\circ - \beta$$

4. Aplicar a fórmula do seno da diferença:

$$\sin \alpha = \sin(210^\circ - \beta) = \sin 210^\circ \cos \beta - \cos 210^\circ \sin \beta$$

Sabendo que:

$$\sin 210^\circ = -\frac{1}{2}, \quad \cos 210^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \alpha = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{4} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = -\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}\sqrt{15}}{8} = \frac{\sqrt{45} - 1}{8} = \frac{3\sqrt{5} - 1}{8}$$

5. Conclusão:

$$\boxed{\sin \alpha = \frac{3\sqrt{5} - 1}{8}}$$

[ ] **Questão 08 (1.0 ponto)** Resolva, em  $\mathbb{R}$ , a equação trigonométrica  $\cos 2x + \cos x + 1 = 0$ .

Solução. 1. Usar a fórmula de  $\cos 2x$  em função de  $\cos x$ :

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

Substituindo:

$$2 \cos^2 x - 1 + \cos x + 1 = 0$$

$$2 \cos^2 x + \cos x = 0$$

2. Colocar em forma fatorada:

$$\cos x(2 \cos x + 1) = 0$$

3. Resolver cada fator:

$$-\cos x = 0 \implies x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad -2 \cos x + 1 = 0 \implies \cos x = -\frac{1}{2} \implies x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

4. Conclusão:

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

[ ] **Questão 09 (2.0 pontos)** Prove cada igualdade:

$$(a) \frac{\sin 7x - \sin 5x}{\cos 7x + \cos 5x} = \tan x. \quad (b) \frac{\tan x - \sec x}{\sin^3 x} = \frac{\sec x}{1 + \cos x}$$

Solução.

(a) 1. Aplicar a fórmula de diferença de senos:

$$\begin{aligned} \sin A - \sin B &= 2 \cos \left( \frac{A+B}{2} \right) \sin \left( \frac{A-B}{2} \right) \\ \sin 7x - \sin 5x &= 2 \cos \left( \frac{7x+5x}{2} \right) \sin \left( \frac{7x-5x}{2} \right) = 2 \cos(6x) \sin(x) \end{aligned}$$

2. Aplicar a fórmula de soma de cossenos:

$$\begin{aligned} \cos A + \cos B &= 2 \cos \left( \frac{A+B}{2} \right) \cos \left( \frac{A-B}{2} \right) \\ \cos 7x + \cos 5x &= 2 \cos \left( \frac{7x+5x}{2} \right) \cos \left( \frac{7x-5x}{2} \right) = 2 \cos(6x) \cos(x) \end{aligned}$$

3. Substituir na fração:

$$\frac{\sin 7x - \sin 5x}{\cos 7x + \cos 5x} = \frac{2 \cos(6x) \sin x}{2 \cos(6x) \cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

Portanto, a igualdade está provada:

$$\frac{\sin 7x - \sin 5x}{\cos 7x + \cos 5x} = \tan x$$

(b) 1. Escrever a tangente e a secante em termos de seno e cosseno:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

2. Substituir  $\tan x$  no numerador da fração da esquerda:

$$\tan x - \sin x = \frac{\sin x}{\cos x} - \sin x = \frac{\sin x - \sin x \cos x}{\cos x} = \frac{\sin x(1 - \cos x)}{\cos x}$$

3. Dividir por  $\sin^3 x$ :

$$\frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} = \frac{\sin x(1 - \cos x)}{\cos x \cdot \sin^3 x} = \frac{1 - \cos x}{\cos x \cdot \sin^2 x}$$

4. Usar a identidade  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = (1 - \cos x)(1 + \cos x)$ :

$$\frac{1 - \cos x}{\cos x \cdot (1 - \cos x)(1 + \cos x)} = \frac{1}{\cos x(1 + \cos x)}$$



5. Reconhecer a secante:

$$\frac{1}{\cos x(1 + \cos x)} = \frac{\sec x}{1 + \cos x}$$

Portanto, a igualdade está provada:

$$\boxed{\frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} = \frac{\sec x}{1 + \cos x}}$$

[ ] **Questão 10 (1,5 ponto)** Calcule o valor de  $y = \csc\left(\frac{1}{2} \cdot \arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$ .

Solução. Dado:

$$y = \csc\left(\frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$$

1. Definir  $\theta = \arccos(-4/5)$ , então  $\cos \theta = -4/5$ .
2. Queremos  $\csc(\theta/2) = 1/\sin(\theta/2)$ . Usar a fórmula do seno da metade do ângulo:

$$\sin \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$$

Como  $\theta \in [0, \pi]$ ,  $\theta/2 \in [0, \pi/2]$ , portanto  $\sin(\theta/2) > 0$ .

3. Substituir  $\cos \theta = -4/5$ :

$$\sin \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - (-4/5)}{2}} = \sqrt{\frac{1 + 4/5}{2}} = \sqrt{\frac{9/5}{2}} = \sqrt{\frac{9}{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

4. Tomar o inverso para  $\csc(\theta/2)$ :

$$y = \csc \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sin(\theta/2)} = \frac{1}{3/\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{3}$$

Portanto:

$$\boxed{y = \frac{\sqrt{10}}{3}}$$

[ ] **Questão 11 (1,5 pontos)** Mostre que

$$\arcsen \frac{4}{5} - \arccos \frac{2}{\sqrt{5}} = \arctan \frac{1}{2}.$$

Solução. 1. Definir:

$$\alpha = \arcsin \frac{4}{5} \implies \sin \alpha = \frac{4}{5}, \quad \alpha \in [0, \pi/2]$$

$$\beta = \arccos \frac{2}{\sqrt{5}} \implies \cos \beta = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \beta \in [0, \pi/2]$$

Queremos  $\alpha - \beta$ .

---

2. Usar a fórmula do seno da diferença de ângulos:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

Já sabemos:

$$\sin \alpha = \frac{4}{5}, \quad \cos \beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Calcular  $\cos \alpha$  e  $\sin \beta$  usando Pitágoras:

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - (4/5)^2} = \sqrt{1 - 16/25} = \sqrt{9/25} = \frac{3}{5}$$

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - (2/\sqrt{5})^2} = \sqrt{1 - 4/5} = \sqrt{1/5} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

---

3. Substituir na fórmula:

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{8 - 3}{5\sqrt{5}} = \frac{5}{5\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{6 + 4}{5\sqrt{5}} = \frac{10}{5\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

4. Determinar a tangente:

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{1/\sqrt{5}}{2/\sqrt{5}} = \frac{1}{2}$$

---

5. Conclusão:

$$\alpha - \beta = \arctan \frac{1}{2} \implies \arcsin \frac{4}{5} - \arccos \frac{2}{\sqrt{5}} = \arctan \frac{1}{2}$$

$$\arcsin \frac{4}{5} - \arccos \frac{2}{\sqrt{5}} = \arctan \frac{1}{2}$$

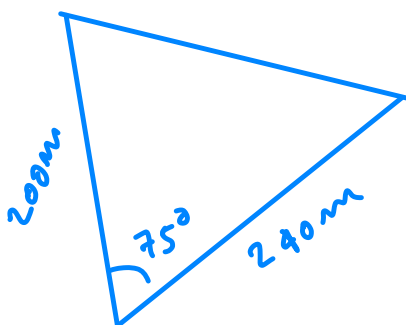
[ ] **Questão 12 (1.0 ponto)** Dois lados de um terreno triangular são 240 m e 200 m, e o ângulo interno entre tais lados mede  $75^\circ$ . Determine a sua área.

Solução. Fórmula da área de um triângulo dado dois lados e o ângulo entre eles:

$$\text{área} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma$$

$$\text{área} = \frac{1}{2} \cdot 240 \cdot 200 \cdot \sin 75^\circ$$

$$\text{área} = 24000 \cdot \sin 75^\circ$$



---

2. Obter o valor exato de  $\sin 75^\circ$  usando a fórmula da soma de arcos notáveis:

$$75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$$

$$\sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$

Sabemos que:

$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Substituindo:

$$\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

---

3. Substituir na fórmula da área:

$$\text{área} = 24000 \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = 6000(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \text{ m}^2$$

---

4. Resultado numérico aproximado:

$$\sqrt{6} \approx 2,449, \quad \sqrt{2} \approx 1,414$$

$$\sqrt{6} + \sqrt{2} \approx 3,863$$

$$\text{área} \approx 6000 \cdot 3,863 \approx 23178 \text{ m}^2$$

Portanto, a área do triângulo é:

$$\text{área} = 6000(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \approx 23178 \text{ m}^2$$

[ ] **Questão 13 (1.0 ponto)** Esboce o gráfico de  $f(x) = 2 - \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ , indicando domínio, imagem e período.

Solução. Note que  $D(f) = \mathbb{R}$ . Já, para a imagem, note que

$$-1 \leq -\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \leq 1.$$

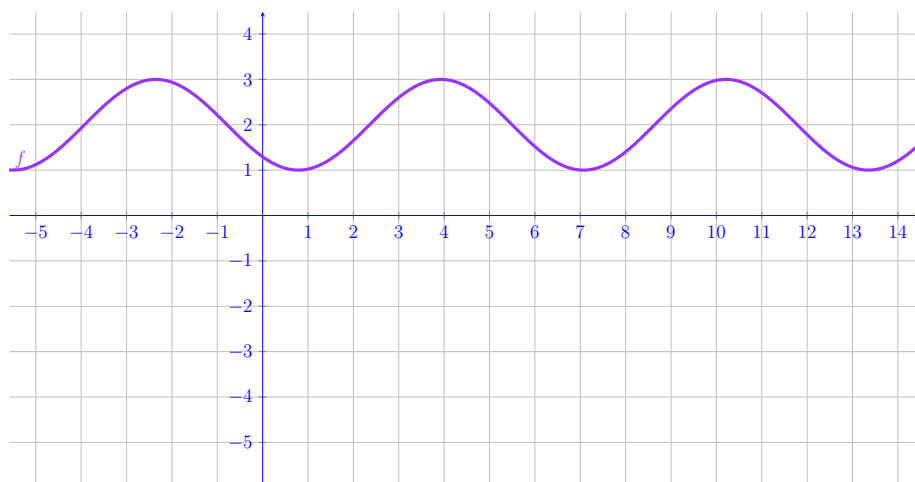
Somando 2, vamos encontrar

$$1 \leq 2 - \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \leq 3,$$

ou seja,

$$Im(f) = [1, 3]$$

Período:  $2\pi$



[ ] **Questão 14 (1.0 ponto)** Esboce o gráfico de  $f(x) = \frac{\pi}{3} + \operatorname{arcsec}(x+1)$ , indicando domínio e imagem.

Solução. 1. **\*\*Domínio\*\***

- A função  $\operatorname{arcsec}(y)$  está definida para  $|y| \geq 1$ . - Aqui,  $y = x+1$ , então  $|x+1| \geq 1 \implies x+1 \leq -1$  ou  $x+1 \geq 1$  - Logo, o domínio é:

$$D_f = (-\infty, -2] \cup [0, +\infty)$$

—

2. **\*\*Imagem\*\***

-  $\operatorname{arcsec}(y)$  tem imagem  $[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$  - Para  $x \geq 0$ :  $x+1 \geq 1 \implies \operatorname{arcsec}(x+1) \in [0, \pi/2)$  - Para  $x \leq -2$ :  $x+1 \leq -1 \implies \operatorname{arcsec}(x+1) \in (\pi/2, \pi]$

- Somando  $\pi/3$ :

- Para  $x \geq 0$ :  $f(x) \in [\pi/3, \pi/3 + \pi/2) = [\pi/3, 5\pi/6)$  - Para  $x \leq -2$ :  $f(x) \in (\pi/3 + \pi/2, \pi/3 + \pi] = (5\pi/6, 4\pi/3]$

$$Im(f) = [\pi/3, 5\pi/6) \cup (5\pi/6, 4\pi/3]$$

—

3. **\*\*Comportamento da função\*\***

- Para  $x \geq 0$ ,  $x+1 \geq 1$ ,  $\operatorname{arcsec}(x+1)$  aumenta com  $x$ , logo  $f(x)$  é crescente. - Para  $x \leq -2$ ,  $x+1 \leq -1$ ,  $\operatorname{arcsec}(x+1)$  diminui com  $x$  (pois a função  $\operatorname{arcsec}$  é decrescente para valores negativos), logo  $f(x)$  é decrescente.

- A assíntota horizontal ocorre em  $y = \pi/3 + \pi/2 = 5\pi/6$ , que é o limite quando  $x \rightarrow +\infty$  e quando  $x \rightarrow -\infty$ .

—

4. **\*\*Esboço do gráfico\*\***

- O gráfico possui duas ramas: 1. Ramo crescente para  $x \geq 0$ , iniciando em  $f(0) = \pi/3 + \operatorname{arcsec}(1) = \pi/3$ , aproximando-se de  $5\pi/6$  2. Ramo decrescente para  $x \leq -2$ , iniciando em  $f(-2) = \pi/3 + \operatorname{arcsec}(-1) = 4\pi/3$ , aproximando-se de  $5\pi/6$

- O gráfico se aproxima da assíntota horizontal  $y = 5\pi/6$ .

—

**\*\*Resumo final:\*\***

$$D_f = (-\infty, -2] \cup [0, +\infty), \quad \text{Im}(f) = [\pi/3, 5\pi/6) \cup (5\pi/6, 4\pi/3]$$

