

Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Variáveis Complexas
Prof. Dr. Maurício Zahn

Lista 16 de Exercícios - Aplicações do Teorema dos resíduos em integrais reais

1. Calcule as integrais a seguir, usando o teorema dos resíduos

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \int_{|z|=3} \frac{(z^2 + 5) dz}{(z + 2i)(z - 1)^3} & \text{(b)} \int_{|z|=5} \frac{z^2 - z - 1}{(z - 1)(z - 4)(z + 3)} dz \\ \text{(c)} \int_{|z|=1} \frac{(1 - z)^4 e^{2z}}{z^5} dz & \text{(d)} \int_{|z|=4} \frac{z^2 + 1}{(z - i)(z - 1)^4} dz \end{array}$$

2. Prove que $\int_{C_r} e^{-z^2} dz \rightarrow 0$ com $r \rightarrow \infty$, onde C_r é o arco $z = re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$.

3. Usando resíduos, calcule as integrais impróprias a seguir (as respostas estão indicadas ao lado)

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{5 + 4 \cos \theta} = -\frac{\pi}{3} & \text{(b)} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{1 + \sin^2 \theta} = \pi\sqrt{2} \\ \text{(c)} \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = \frac{\pi}{6} & \text{(d)} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + 1} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} \\ \text{(e)} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\pi}{4} & \text{(f)} \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\pi}{2e} \\ \text{(g)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin ax}{x^4 + 4} dx = \frac{\pi}{2} e^{-a} \sin a & \text{(h)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x^2 + 4x + 5} = -\frac{\pi}{e} \sin 2 \\ \text{(i)} \int_0^{+\infty} \frac{x \sin 2x}{x^2 + 4} dx = \frac{\pi e^{-4}}{2} & \text{(j)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 4)} = \frac{\pi}{9} \\ \text{(k)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2 - x + 3)dx}{x^4 + 5x^2 + 4} = \frac{5\pi}{6} & \text{(\ell)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x + 2) \sin 3x dx}{x^2 + 1} = \frac{\pi}{e^3} \end{array}$$

4. Use resíduos para calcular $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$ e confirme o resultado integrando depois como se faz em Cálculo.

5. Mostre que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos 2\pi x}{x^4 + x^2 + 1} dx = -\frac{\pi}{2\sqrt{3}} e^{-\frac{\pi}{\sqrt{3}}}.$$