**Universidade Federal de Pelotas**
**Curso de Licenciatura em Matemática**
**Disciplina de Variáveis Complexas**
**Prof. Dr. Maurício Zahn**
**Lista 15 de Exercícios - Resíduos e o Teorema dos resíduos**

1. Expandindo $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z^4}$ em série de Laurent, determine o resíduo de $f(z)$ em $z_0 = 0$.

2. Encontre o resíduo das funções abaixo em todos os seus pontos singulares isolados:

   (a) $f(z) = \dfrac{1+z}{z}$ (b) $f(z) = \dfrac{1+z}{z^2+2z+2}$ (c) $f(z) = \dfrac{1+e^z}{z^2} + \dfrac{2}{z}$

   (d) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen}(z^2)}{z^2(z^2+1)}$ (e) $f(z) = \dfrac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$ (f) $f(z) = z \operatorname{sen} \dfrac{1}{z}$

3. Considere as seguintes séries de Laurent em $z = 0$:

$$A(z) = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{2!z} + \frac{z}{4!} - \frac{z^3}{6!} + ...$$

   e

$$B(z) = 1 - \frac{1}{2!z^6} + \frac{1}{4!z^{12}} - \frac{1}{6!z^{18}} + ...$$

   Sabendo que $A(z)$ e $B(z)$ possuem singularidade apenas em $z = 0$, responda as seguintes questões:

   (a) Classifique as singularidades de $A(z)$ e $B(z)$ e justifique sua classificação.

   (b) Calcule $\int_{|z|=1} A(z)dz$ onde o contorno é percorrido no sentido anti-horário.

   (c) Calcule $\int_{|z|=1} B(z)dz$ onde o contorno é percorrido no sentido horário.

4. Calcule $\displaystyle\int_{|z|=2} e^{\frac{1}{z^2}} dz$

5. Usando resíduos, calcule as integrais:

   (a) $\displaystyle\int_{\partial D_1(0)} \frac{z^2+3z-1}{z(z^2-3)} dz$ (b) $\displaystyle\int_{\partial D_{\frac{1}{10}}(1)} \frac{dz}{z^5-1}$ (c) $\displaystyle\int_{\partial D_1(0)} \frac{e^{z^2}}{z^6} dz$

   (d) $\displaystyle\int_{\partial D_1(0)} \cos \frac{1}{z^2} e^{\frac{1}{z}} dz$ (e) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z^3}{z^4-1} dz$ (f) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z(2z+1)^2} dz$

6. Calcule $\displaystyle\int_Q \frac{2+3\operatorname{sen} z}{z(z-1)^2}$, onde $Q$ é um quadrado de vértices em $3+3i$, $3-3i$, $-3+3i$ e $-3-3i$.

7. Calcule o Resíduo de $f(z) = (1-z^2)e^{\frac{1}{z}}$.

8. Seja $f$ holomorfa em um aberto $\Omega$, tal que $f'(a) \neq 0$, para algum $a \in \Omega$. Mostre que

$$\int_C \frac{dz}{f(z) - f(a)} = \frac{2\pi i}{f'(a)},$$

onde $C$ é uma circunferência suficientemente pequena em $\Omega$, centrada em $a$.

9. Sejam $f$ uma função holomorfa numa vizinhança de $z_0$ e $m \geq 2$ um número inteiro. Prove que

$$\text{Res}\left(\frac{f(z)}{(z - z_0)^m}, z_0\right) = \frac{f^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$$

10. Prove que se $f$ possui um pólo simples em $z_0$ e $g$ é holomorfa em $z_0$, então

$$\text{Res}(f(z)g(z), z_0) = g(z_0)\,\text{Res}(f(z), z_0).$$

11. Mostre que $\text{Res}(f + g, z_0) = \text{Res}\,(f, z_0) + \text{Res}(g, z_0)$.

12. Suponha que $f$ possua exatamente um zero $a$ no interior de uma circunferência $\gamma$ e que $f'(a) \neq 0$. Mostre que

$$a = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{z f'(z)}{f(z)} dz.$$

13. Sejam $z_1, z_2, ..., z_n$ números complexos distintos. Seja $C$ a circunferência centrada em $z_1$ tal que no seu interior não contém os pontos $z_j$, para $j > 1$. Seja

$$f(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n).$$

Mostre que

$$\int_C \frac{1}{f(z)} dz = 2\pi i \prod_{j=2}^{n} \frac{1}{z_1 - z_j}.$$

14. Seja $f$ uma função holomorfa e diferente de zero no ponto $z = z_0$. Mostre que a função

$$g(z) = \frac{f(z)}{z - z_0}$$

tem pólo simples nesse ponto, com resíduo igual a $f(z_0)$.

15. Considere a função $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{(z^2 + 9)(z - 3i)}$

   (a) Determine os pólos e suas respectivas ordens.

   (b) calcule os resíduos de $f$ em cada um de seus pólos

   (c) Calcule $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz$, sendo $\gamma(t) = 1 + 4e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

16. **Resíduo no infinito.** Seja $f$ holomorfa no domínio $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < \infty\}$ e seja

$$f(z) = \cdots + \frac{a_{-n}}{z^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

sua representação em série de Laurent, uniformemente convergente em $\Omega$. Seja $\gamma = \partial D_\rho(0)$ a fronteira de um disco aberto qualquer $D_\rho(0)$, com $\rho > r$, com orientação positiva.

(a) Integre a expansão acima ao longo de $-\gamma$ e conclua que $\displaystyle\int_{-\gamma} f(z)dz = -2\pi i a_{-1}$.

(b) **Definimos** o *resíduo de $f$ no ponto infinito* por $\mathrm{Res}_\infty f = -a_{-1}$. Conclua que

$$\int_{-\gamma} f(z)dz = 2\pi i \mathrm{Res}_\infty f.$$

(c) Prove a seguinte **Proposição:** *Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa, exceto em um número finito de pontos singulares isolados. Então, a soma de todos os resíduos de $f$ em $\mathbb{C}$ e no infinito é igual a zero.*

17. Integrando a função

$$f(z) = \frac{\cot \pi z}{z^2 + 1},$$

ao longo do quadrado $C_N$ com vértices em $\pm(N + \frac{1}{2}) \pm (N + \frac{1}{2})i$, mostre que

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1} = \pi \coth \pi$$

(Obs.: Assuma que $\int_{C_N} f(z)dz$ tende a zero quando $N \to \infty$, ou prove este fato, se desejardes).