Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Variáveis Complexas
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 14 de Exercícios - Zeros e singularidades

1. Encontre os zeros isolados de cada função abaixo, bem como suas respectivas ordens:

   (a) $f(z) = (1 - z^2)\operatorname{sen} z$ (b) $f(z) = z^3(e^z - 1)$ (c) $f(z) = \operatorname{senh} z$.

2. Encontre a ordem do zero $z_0 = 0$ em cada item abaixo:

   (a) $f(z) = 1 - \dfrac{z^2}{2} - \cos z$ (b) $f(z) = z - \operatorname{sen} z$ (c) $f(z) = z\log(1 + z)$

3. Ache a ordem do zero $z_0 = 0$ da função $f(z) = 6\operatorname{sen} z^3 + z^3(z^6 - 6)$.

4. Prove que se f e g forem holomorfas em z_0 e possuírem zeros em z_0 de ordens m e n, respectivamente, então fg será holomorfa em z_0 e este ponto será um zero de ordem $m + n$ para fg.

5. Prove que se uma função f tem um zero z_0 de ordem k, $k \geq 2$, então este mesmo z_0 será um zero de ordem $k - 1$ para f'.

6. Prove que se $f(z)$ tem um zero de ordem m em $z = z_1$ e $g(z)$ tem um zero de ordem n no ponto $z = z_0$, então $f(z_1 + g(z))$ tem um zero de ordem mn em $z = z_0$.

7. De cada função $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ abaixo: (i) obtenha a série de Laurent de f em $z = 0$; (ii) classifique a singularidade em $z = 0$.

   (a) $f(z) = \dfrac{e^z}{z^4}$ (b) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z - z}{z^3}$ (c) $f(z) = \dfrac{1}{z^3(z - 1)}$

8. Determine todos os pontos singulares isolados de cada função abaixo, classificando-os:

   (a) $f(z) = \dfrac{z^4}{1 + z^4}$ (b) $f(z) = ze^{-z}$ (c) $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^2}$

   (d) $f(z) = (1 - z^2)e^{\frac{1}{z}}$ (e) $f(z) = \dfrac{1 - \cos z}{z^2}$ (f) $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^2 - z^3}$

9. Prove que se a função f possui z_0 como um pólo de ordem k, então esse mesmo z_0 será um pólo de ordem $k + 1$ para f'.

10. Determine os pólos e as respectivas ordens de cada função abaixo:

    (a) $f(z) = \dfrac{z + 4}{z(z^2 + 1)^2}$ (b) $f(z) = \dfrac{\sin z}{x^3(z - \pi)}$ (c) $f(z) = \dfrac{1 - e^z}{z^4 \sin(1 + z)}$

11. Determine o conjunto de pontos singulares de $f(z) = \csc z$. Represente essa função em série de Laurent em $z_0 = 0$, no anel $A_{\pi,2\pi}(0)$.