Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Variáveis Complexas
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 13 de Exercícios - Série de Laurent

1. Obtenha a série de Laurent para as funções nos anéis indicados:

   (a) $f(x) = \dfrac{1}{2+iz}$, em $|z| > 2$

   (b) $f(z) = \dfrac{1}{3+2iz}$, em $|z+i| > \frac{5}{2}$

   (c) $f(z) = \dfrac{1}{(3z-1)(2z+1)}$, em $\frac{1}{3} < |z| < \frac{1}{2}$

   (d) $f(z) = \coth z$, em $0 < |z| < \pi$

   (e) $f(z) = \dfrac{-2}{(2z-1)(2z+1)}$, em $|z| > \frac{1}{2}$

   (f) $f(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$, em $|z| > 1$

2. Derive a série de Laurent

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{z^n} \quad \text{em} \quad |z| > 1.$$

   Em seguida, a partir desta série, ache as séries de Laurent das funções:

   (a) $f(z) = \dfrac{1}{(1+z)^2}$

   (b) $f(z) = \dfrac{z}{(1+z)^2}$

   (c) $f(z) = \dfrac{z^2}{(1+z)^3}$

3. Obtenha o desenvolvimento em série de Laurent para $f(z) = \dfrac{\operatorname{senh} z}{z^2}$, onde $|z| > 0$.

4. Obtenha a série de Laurent de $f(z)$ em cada caso:

   (a) $f(z) = \dfrac{z^5}{z-1}$, $z_0 = 0$, $|z| > 1$.

   (b) $f(z) = z^5 e^{\frac{1}{z}}$, $z_0 = 0$, $|z| > 1$.

5. Ache a série de Laurent para $f(z) = \dfrac{33}{(2z-1)(z+5)}$ que convirja em um anel contendo o ponto $z = -3i$ e estabeleça precisamente onde esta série converge.

6. Obtenha a série de Laurent para $f(z) = \dfrac{z+4}{z^2(z^2+3z+2)}$ no anel:

   (a) $0 < |z| < 1$

   (b) $1 < |z| < 2$

   (c) $|z| > 2$

   (d) $0 < |z+1| < 1$

7. Mostre que os quatro primeiros termos do desenvolvimento da série de Laurent para $f(z) = \dfrac{e^z}{z(z^2+1)}$, $0 < |z| < 1$ são dados por

$$\frac{1}{z} + 1 - \frac{1}{2}z - \frac{5}{6}z^2 + ...$$

8. Calcule cada integral abaixo, usando uma série de Laurent apropriada.

(a) $\displaystyle\int_{|z|=1} \operatorname{sen}\frac{1}{z}dz$ (b) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\cos\frac{1}{z^2}}{z}dz$ (c) $\displaystyle\int_{|z|=2} e^{\frac{1}{z^2}}dz$

(d) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z}dz$ (e) $\displaystyle\int_{|z|=1} e^{z+\frac{1}{z}}dz$