

Lista 07

8. (Reações químicas de Primeira Ordem) Em algumas reações químicas, a taxa à qual a quantidade de uma substância varia em relação ao tempo é proporcional à quantidade presente. Para a transformação da δ -glucono lactona em ácido glucônico, por exemplo,

$$\frac{dy}{dt} = -0,6y,$$

onde t é medido em horas. Se houver 100 g de δ -glucono lactona presentes quando $t = 0$, quantos gramas restarão depois da primeira hora? (Resp.: 54,88 g)

$$\boxed{t=0 \Rightarrow y=100 \text{ g.}} \quad \text{condição inicial}$$
$$t=1 \Rightarrow y=?$$

$$\frac{dy}{dt} = -0,6y$$

$$\frac{dy}{y} = -0,6 dt \quad . \quad \text{Integrando, vem:}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int -0,6 dt$$

$$\ln |y| = -0,6t + c \quad \Leftrightarrow \quad e^{\ln |y|} = e^{-0,6t+c}$$

$$y = e^{-0,6t} \cdot \underbrace{e^c}_{=k}$$

$$y = k \cdot e^{-0,6t}$$

$t=0$; $y=100$, e diso:

$$100 = k \cdot e^0 \Rightarrow \boxed{k=100}$$

Sotanto, diso:

$$y = 100 \cdot e^{-0,6t}$$

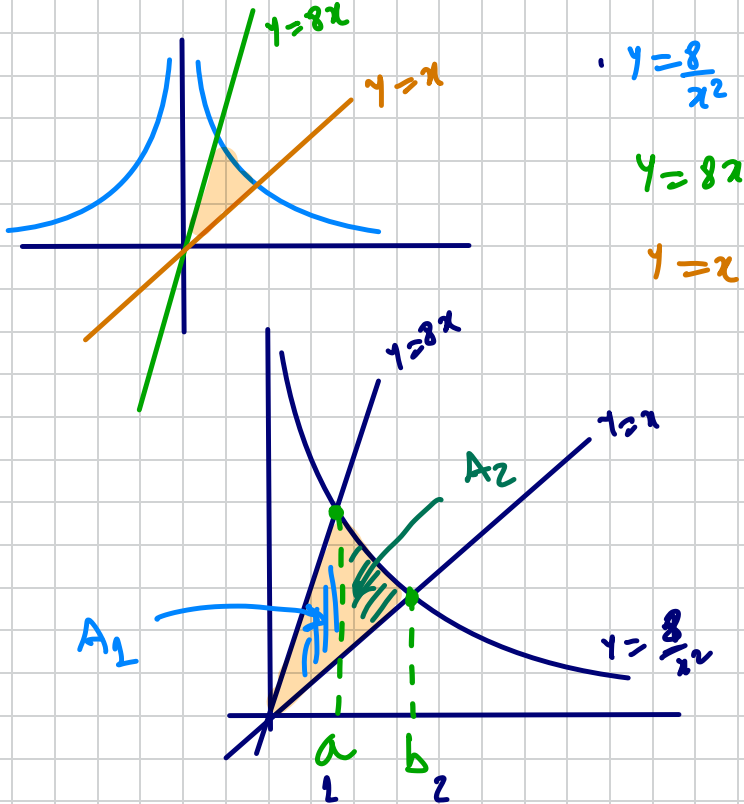
Per fim ; per $t=1h$; diso:

$$y = 100 \cdot e^{-0,6 \cdot 1} = 100 \cdot e^{-0,6} \text{ g}$$

$$\approx \underline{\underline{54,88 \text{ g}}}$$

28.11

10. Obtenha a área da região limitada pelas curvas $y = \frac{8}{x^2}$, $y = 8x$ e $y = x$.



$$a: \frac{8}{x^2} = 8x \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} = x \Leftrightarrow x^3 = 1 \\ \Leftrightarrow \boxed{x = 1}$$

$$b: \frac{8}{x^2} = x \Leftrightarrow x^3 = 8 \Leftrightarrow \boxed{x = 2} \quad \boxed{a = 1} \quad \textcircled{b = 2}$$

Geheimnis:

$$\boxed{A_1 + A_2 = ?} ; \text{ ende:}$$

$$\begin{aligned} \bullet A_1 &= \int_0^1 8x \, dx - \int_0^1 x \, dx = \int_0^1 (8x - x) \, dx = \\ &= \int_0^1 7x \, dx = \frac{7x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{7}{2} - 0 = \underline{\underline{\frac{7}{2}}} \end{aligned}$$

$$\bullet A_2 = \int_1^2 \frac{8}{x^2} \, dx - \int_1^2 x \, dx =$$

$$= 8 \int_1^2 x^{-2} \, dx - \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 =$$

$$= 8 \frac{x^{-1}}{-1} \Big|_1^2 - \left[\frac{4}{2} - \frac{1}{2} \right] =$$

$$= -\frac{8}{x} \Big|_1^2 - \frac{3}{2} = -\frac{8}{2} + 8 - \frac{3}{2}$$

$$= -\frac{11}{2} + 8 \underline{\underline{=}}$$

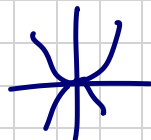
Portanto:

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= \frac{\pi}{2} + \left(-\frac{11}{2} + 8\right) \\ &= -\frac{4}{2} + 8 = 6 \text{ u.a.} \end{aligned}$$

L8

9. Calcule a área da região limitada pelas curvas $y = x^3 - 6x$ e $y = 8 - 3x^2$.

$$y = x^3 - 6x = x(x^2 - 6) = x(x - \sqrt{6})(x + \sqrt{6})$$



interceptos:

$$x^3 - 6x = 8 - 3x^2$$

$$x^3 + 3x^2 - 6x - 8 = 0$$

divisores de -8:

$x = 2$ é uma raíz pois

$\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8$

$$(2)^3 + 3 \cdot (2)^2 - 6 \cdot (2) - 8 = 8 + 12 - 12 - 8 = 0.$$

$$\begin{array}{r}
 \overline{x^3 + 3x^2 - 6x - 8} \quad | \quad \overline{x - 2} \\
 \underline{-x^3 + 2x^2} \\
 5x^2 - 6x - 8 \\
 \underline{-5x^2 + 10x} \\
 4x - 8 \\
 \underline{-4x + 8} \\
 0
 \end{array}$$

$$\Rightarrow x^3 + 3x^2 - 6x - 8 = (x - 2)(x^2 + 5x + 4)$$

zeros para $x^2 + 5x + 4 = 0$:

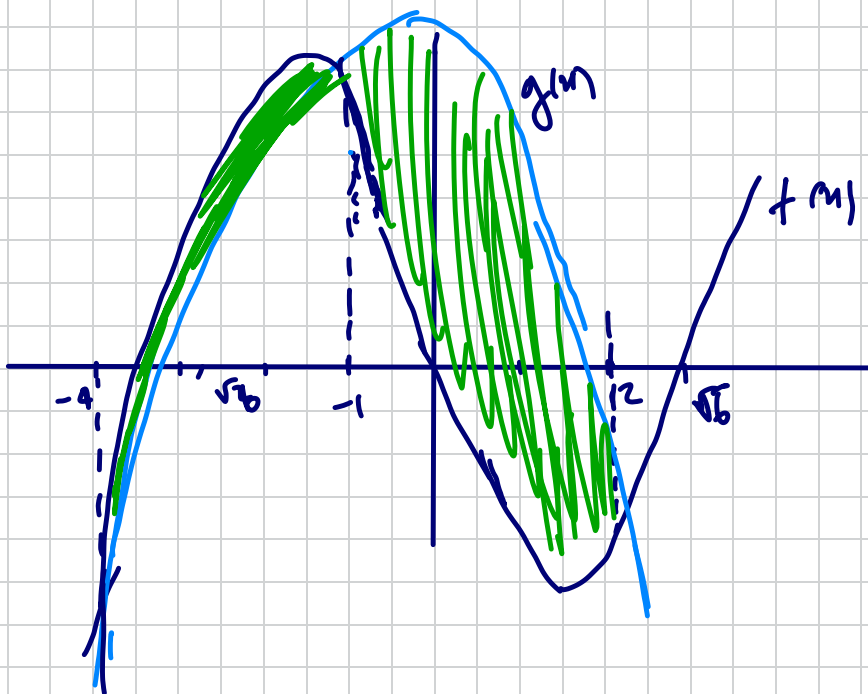
$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2}$$

$$x = \frac{-5 \pm 3}{2} \rightarrow \begin{array}{l} x = -1 \\ x = -4 \end{array}$$

ou seja, obtemos os zeros:

$$\begin{aligned}
 x^3 + 3x^2 - 6x - 8 &= (x - 2)(x^2 + 5x + 4) \\
 &= (x - 2)(x + 1)(x + 4)
 \end{aligned}$$

↑
interseções
das duas
curvas.



$$A = \int_{-4}^{-1} (f(u) - g(u)) du + \int_{-1}^2 (g(u) - f(u)) du ,$$

$$\text{onde } f(u) = u^3 - 6u \quad \text{e}$$

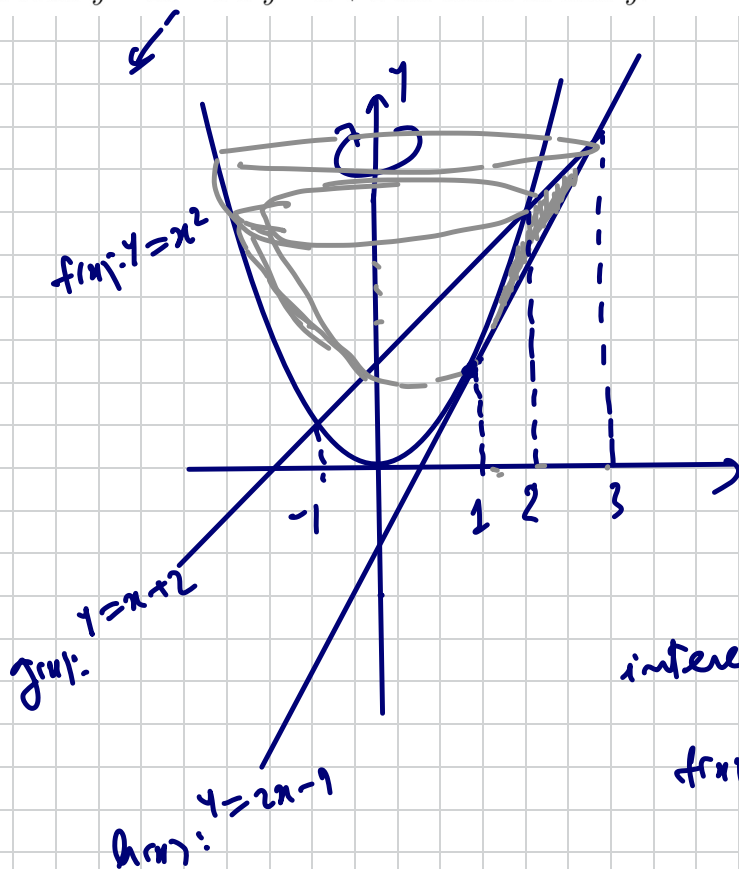
$$g(u) = 8 - 3u^2$$

(etc. ...)



L9

14. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região fora da curva $y = x^2$ e entre as retas $y = 2x - 1$ e $y = x + 2$ em torno do eixo y .



interception:

$$f(x) = g(x)$$

$$x^2 = x + 2$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = -1; x = 2}$$

$$g = h \Leftrightarrow x + 2 = 2x - 1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = 3}$$

$$f = h \Leftrightarrow x^2 = 2x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$$

tangente

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

Vamos usar o método do disco; então devemos ter $x = f(y)$ nas três funções.

Vamos ter que determinar os limites de integração em y .

- $x = 1$; em $y = 2x - 1$, temos

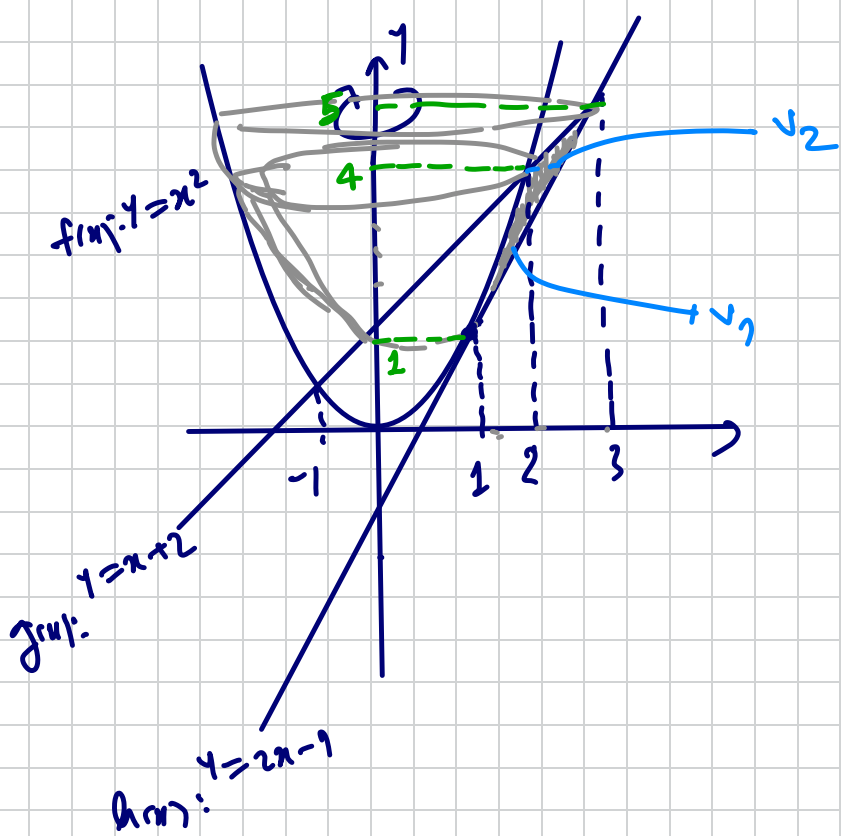
$$y = 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

- $x = 2$; em $y = x + 2$ temos:

$$y = 2 + 2 = 4$$

- $x = 3$, em $y = x + 2$ (ou $y = 2x - 1$), temos

$$y = 3 + 2 = 5$$



$$V = V_1 + V_2, \text{ onde:}$$

$$V_1 = \pi \int_1^4 ((h(y))^2 - (f(y))^2) dy$$

$$V_2 = \pi \int_4^5 [(h(y))^2 - (g(y))^2] dy ; \text{ onde:}$$

- $h(y)$ é tal que $y = 2x - 1 \Rightarrow x = \frac{y+1}{2}$
- $g(y)$ é tal que $y = x + 2 \Rightarrow x = y - 2$

• $f(y)$ é tal que $y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y}$.

Assim:

$$\begin{aligned} *) \quad V_1 &= \pi \int_1^4 \left[\left(\frac{y+1}{2} \right)^2 - (\sqrt{y})^2 \right] dy \\ &= \pi \int_1^4 \frac{1}{4} (y+1)^2 dy - \pi \int_1^4 y dy \\ &= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{(y+1)^3}{3} \Big|_1^4 - \pi \frac{y^2}{2} \Big|_1^4 = \\ &= \frac{\pi}{12} (5^3 - 2^3) - \frac{\pi}{2} (16 - 1) \\ &= \frac{117\pi}{12} - \frac{15\pi}{2} = \frac{117\pi - 90\pi}{12} = \frac{27\pi}{12} \stackrel{13}{=} \frac{9\pi}{4} \stackrel{14}{=} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} *) \quad V_2 &= \pi \int_4^5 \left(\frac{y+1}{2} \right)^2 dy - \pi \int_4^5 (y-2)^2 dy = \\ &= \frac{\pi}{4} \frac{(y+1)^3}{3} \Big|_4^5 - \frac{\pi}{3} (y-2)^3 \Big|_4^5 = \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{12} (6^3 - 5^3) - \frac{\pi}{3} (3^3 - 2^3) =$$

$$= \frac{91\pi}{12} - \frac{19\pi}{3} = \frac{91\pi - 76\pi}{12} = \frac{15\pi}{12} \stackrel{L3}{=} \frac{5\pi}{4} \text{ u.m.}$$

Donc, le volume final sera :

$$V = V_1 + V_2 = \frac{9\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} = \frac{14\pi}{4} \stackrel{L3}{=} \frac{7\pi}{2} \text{ u.m.}$$

