

INTEGRAIS CURVILÍNEAS

Def. Seja $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função complexa dada por $f(t) = x(t) + i \cdot y(t)$, onde $x, y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.
Dizemos que f é integrável em $[a, b]$, se $x(t)$ e $y(t)$ forem integrais em $[a, b]$, com:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) dt &= \int_a^b (x(t) + i \cdot y(t)) dt = \\ &= \int_a^b x(t) dt + i \cdot \int_a^b y(t) dt. \end{aligned}$$

PROPRIEDADES: Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ funções integrais. Valem as propriedades:

$$(a) \quad \int_a^b \alpha f + \beta g = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

$$(b) \operatorname{Re}\left(\int_a^b f(t) dt\right) = \int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) dt \quad e$$

$$\operatorname{Im}\left(\int_a^b f(t) dt\right) = \int_a^b \operatorname{Im}(f(t)) dt$$

$$(c) \left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

DEMONSTRAR! Teorema (c):

Primeiramente, note que

$$\int_a^b f(t) dt \in \mathbb{C}. \text{ Assim, } \exists \rho, \theta \text{ tais que}$$

$$\int_a^b f(t) dt = \rho \cdot e^{i\theta}; \quad \rho > 0 \text{ e } \theta \in [0, 2\pi]$$

Com isso, observe que:

$$e^{-i\theta} \cdot \int_a^b f(t) dt = \cancel{e^{-i\theta}} \cdot \rho \cancel{e^{i\theta}} = \rho \in \mathbb{R}.$$

Essa forma, tem-se:

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| = \left| \underbrace{e^{-i\theta}}_{\substack{\text{TEM MÓDULO 1} \\ \in \mathbb{R}}} \int_a^b f(t) dt \right| = \left| \int_a^b \underbrace{e^{-i\theta} \cdot f(t)}_{\text{pelo item (a)}} dt \right|$$

$$\leq \int_a^b |e^{-i\theta} f(t)| dt = \int_a^b \underbrace{|e^{-i\theta}|}_{=1} \cdot |f(t)| dt = \int_a^b |f(t)| dt$$

pois em $\mathbb{R}$ vale
a propriedade

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

(em $\mathbb{R}$)

□

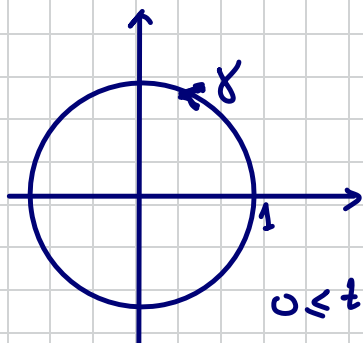
Def.: Seja $f: \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua
e $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$ um caminho. Definimos a
integral de f ao longo do caminho γ por

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

Vejam os alguns exemplos:

02) Calcule $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$, onde γ é a circunferência unitária centrada na origem, no sentido anti-horário.

Solução:



$$z = \gamma(t) = e^{it}$$

$$\begin{aligned} & \cos t + i \sin t \\ & (\cos t, \sin t) \\ & \quad \quad \quad \begin{matrix} x & y \end{matrix} \end{aligned}$$

$$f(z) = \frac{1}{z} \quad ; \quad \gamma(t) = e^{it}$$

$$\Rightarrow \gamma'(t) = i \cdot e^{it}$$

$$\Rightarrow f(\gamma(t)) = \frac{1}{e^{it}} = e^{-it}$$

Então, obtemos:

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \cancel{e^{-it}} \cdot i \cancel{e^{it}} dt = i \int_0^{2\pi} dt$$

$$= i \cdot t \Big|_0^{2\pi} = i \cdot (2\pi - 0) = \underline{\underline{2\pi i}}$$

02) Calcule $\int_0^{1+i} z dz$, ao longo da parábola.

$$\gamma(t) = t + i t^2.$$

Solução: $f(z) = z$.

$$f(\gamma(t)) = t + i t^2$$

$$\gamma(t) = t + i t^2 \Rightarrow \gamma'(t) = 1 + 2i t$$

$$\gamma(t) = t + i t^2$$

$$\gamma(t) = 0$$

$\Downarrow$

$$t + i t^2 = 0 + 0i$$

$$\boxed{t = 0}$$

$$\gamma(t) = 1 + i$$

$\Downarrow$

$$t + i t^2 = 1 + i \Leftrightarrow t = 1 \text{ ou } t^2 = 1. \Leftrightarrow \boxed{t = 1}$$

Dica: reque que

$$\int_0^{1+i} z dt = \int_{t=0}^{t=1} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_0^1 (t + i t^2) \cdot (1 + 2i t) dt$$

$$= \int_0^1 (t + 3it^2 - 2t^3) dt = \left(\frac{t^2}{2} + it^3 - \frac{t^4}{2} \right) \Big|_0^1 =$$

$$= \cancel{\frac{1}{2}} + i - \cancel{\frac{1}{2}} - 0 = i //$$

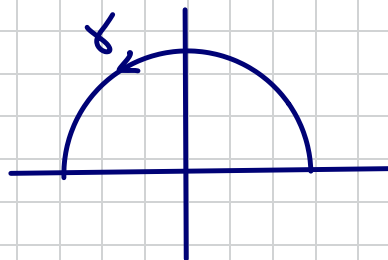
03) Calcule $\int_{\gamma} f(z) dz$, sendo $f(z) = \frac{z+2}{z}$ e

γ o semicírculo $z = 2 \cdot e^{it}$.

Solução:

$$z = \gamma(t) = 2e^{it}$$

$$0 \leq t \leq \pi.$$



$$\underline{f(\gamma(t))} = \frac{\gamma(t) + 2}{\gamma(t)} = \frac{2e^{it} + 2}{2e^{it}} =$$

$$= \underline{1 + e^{-it}}$$

$$\gamma(t) = 2e^{it} \Rightarrow \gamma'(t) = 2ie^{it}$$

Assum; parameter:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^{\pi} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

$$= \int_0^{\pi} (1 + e^{-it}) \cdot zi e^{it} dt$$

$$= \int_0^{\pi} zi e^{it} dt + \int_0^{\pi} zi dt$$

$$= 2 \int_0^{\pi} e^{it} \cdot \underbrace{(i dt)}_{\int e^{in} dr} + zi \int_0^{\pi} dt =$$

$$\int e^{in} dr$$

$$r = it \Rightarrow dr = i dt$$

$$= 2 e^{it} \Big|_0^{\pi} + zi t \Big|_0^{\pi} = 2 e^{i\pi} - 2 e^0 + zi(\pi - 0)$$

$$= 2 e^{i\pi} - 2 + 2\pi i = 2 \cdot \left(\underbrace{\cos \pi}_{-1} + i \underbrace{\sin \pi}_{=0} \right) - 2 + 2\pi i$$

$$= -2 - 2 + 2\pi i = \underline{\underline{-4 + 2\pi i}}$$

PROP. Se $f(z) = u + iv$, e $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$
um caminho, então

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} [u dx - v dy] + i \int_{\gamma} [v dx + u dy].$$

DEMONSTRAÇÃO Seja $\gamma(t) = x(t) + i y(t)$ uma
parametrização.

Como $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$; com

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad \text{então}$$

$$f(z) dz = f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt =$$

$$= (u(x, y) + i v(x, y)) \cdot (x'(t) + i y'(t)) dt$$

$$= \left((u \cdot x'(t) - v \cdot y'(t)) + i (u \cdot y'(t) + v \cdot x'(t)) \right) dt$$

$$= \left(u \cdot \frac{dx}{dt} - v \cdot \frac{dy}{dt} \right) dt + i \left(u \cdot \frac{dy}{dt} + v \cdot \frac{dx}{dt} \right) dt$$

$$= (u dx - v dy) + 1 \cdot (u dy + v dx)$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} (u dx - v dy) + 1 \cdot (u dy + v dx)$$

$$= \int_{\gamma} (u dx - v dy) + 1 \cdot \int_{\gamma} (u dy + v dx)$$

□

PROPOSIÇÃO: (operações com caminhos)

Sejam $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ contínuas, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
e $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ curvas suaves por partes em Ω .
Valem as propriedades:

$$(a) \int_{\gamma} c_1 \cdot f + c_2 \cdot g = c_1 \int_{\gamma} f + c_2 \int_{\gamma} g$$

$$(b) \int_{-\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz$$

$$(c) \int_{\gamma_1 + \gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz$$

DEMONSTR! Trocaremos o item (b).

Seja γ a parametrização:

$$z = \gamma(t) ; a \leq t \leq b.$$

A parametrização $-\gamma$ (contrária) será:

$$z = \gamma(-t) ; b \leq -t \leq a$$

Assim:

$$\int_{-\gamma} f(z) dz = \int_b^a f(\gamma(-t)) \cdot \gamma'(-t) \cdot (-dt) \quad \Leftrightarrow$$

Então $-t = s \rightarrow dt = -ds$

Então:

$$\begin{cases} -t = b \Rightarrow s = b \\ -t = a \Rightarrow s = a \end{cases}$$

$$\textcircled{=} \int_b^a f(\gamma(s)) \cdot \gamma'(s) ds = - \int_a^b f(\gamma(s)) \cdot \gamma'(s) ds$$

$\uparrow$
 CÁLCULO II

$$= - \int_{\gamma} f(z) dz$$

□

TEOREMA: (T.F.C. para integrais curvilíneas)
 Sejam $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ uma curva suave por partes e $F: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfe em Ω , tal que $\gamma \subset \Omega$. Então:

$$\int_{\gamma} F'(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Em particular, se γ for um caminho fechado, então

$$\int_{\gamma} F'(z) dz = 0.$$

DEMONSTR.: Exerc

$$F(\gamma(t)) := g(t) = x(t) + r \cdot y(t)$$

Resposta; pela regra da cadeia:

$$F'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = g'(t) = x'(t) + r \cdot y'(t)$$

Resposta:

$$\int_{\gamma} F'(z) dz = \int_a^b F'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt =$$

$$= \int_a^b (x'(t) + r \cdot y'(t)) dt =$$

$$= \int_a^b x'(t) dt + r \cdot \int_a^b y'(t) dt$$

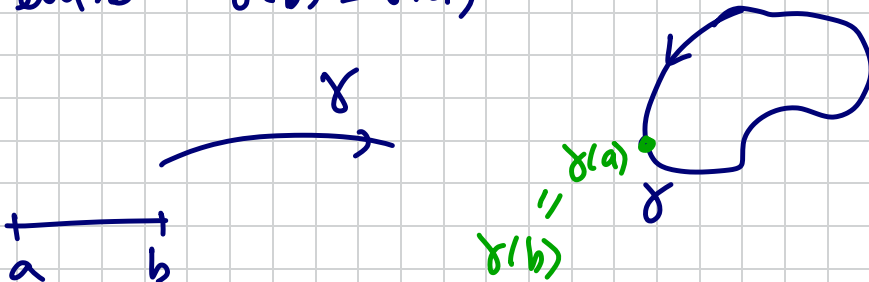
$$= x(t) \Big|_a^b + r \cdot y(t) \Big|_a^b$$

$$= x(b) - x(a) + r \cdot y(b) - r \cdot y(a)$$

$$= \underbrace{x(b) + i \cdot y(b)}_{g(b)} - \underbrace{[x(a) + i \cdot y(a)]}_{g(a)}$$

$$= g(b) - g(a) = \underbrace{F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))}$$

Além disso, se γ é contínua por fechado,
então $\gamma(b) = \gamma(a)$



$$\text{Diz-se: } F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0.$$

$$\text{Ou seja, } \int_{\gamma} F'(z) dz = 0,$$

$\forall \gamma$ contínua fechada.

□

Ex-1 Calcular $\int_{\gamma} e^z dz$, onde γ
é a semi-circulo $z = 2e^{i\theta}$; $0 \leq \theta \leq \pi$

Solução: Note que pensando em
 $\int_{\gamma} F'(z) dz$; então estamos

assumindo $F'(z) = e^z$; e como

$$\frac{d}{dz}(e^z) = e^z \quad ; \quad e \quad F(z) = e^z e^1$$

holomorfe em $\mathbb{C}$; segue que;

$$\text{como } z = \gamma(\theta) = 2e^{i\theta}; \quad 0 \leq \theta \leq \pi;$$

tem-se:

$$\int_{\gamma} e^z dz = \int_{\gamma} F'(z) dz = F(\gamma(\pi)) - F(\gamma(0));$$

$$\text{onde } \gamma(\pi) = 2e^{i\pi} = 2 \cdot (\underbrace{\cos \pi}_{-2} + i \underbrace{\sin \pi}_0) = -2,$$

2

$$\gamma(0) = 2e^{i \cdot 0} = 2e^0 = 2$$

Answer:

$$\int_{\gamma} e^z dz = F(\gamma(\pi)) - F(\gamma(0)) =$$

$$= F(-2) - F(2)$$

$$= e^{-2} - e^2 = \frac{1}{e^2} - e^2$$

↑

$$f(z) = e^z$$

~~~~~

~~~~~