VARIÁVEIS COMPLEXAS

30/07/25 — AULA 25

TEOREMA DE WEIERSTRASS: Seja $S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ uma série, onde $f_n \in \mathcal{O}(\Omega)$, $\forall n \in \mathbb{N}$; e suponha que a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ seja uniformemente convergente em todo domínio fechado $\bar{D} \subset \Omega$. Então, a soma $S(z)$ da série é holomorfa em Ω. Além disso, a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ pode ser derivada termo a termo e em qualquer número de vezes, i.e.,

$$S^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z) \ ; \quad \forall k \in \mathbb{N}; \ \forall z \in \Omega,$$

e cada série derivada é também uniformemente convergente em todo domínio fechado $\bar{D} \subset \Omega$.

DEMONSTR.: Veja o vídeo (aula 25) postado na página da disciplina.

Ex: Considere a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{z}{n}\right)}{n}$;

em $|z| \leq 2$.

Note que esta série é uniformemente convergente, pois, sendo $f_n(z) = \dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{z}{n}\right)}{n}$;

temos:

- $$|f_n(z)| = \left|\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{z}{n}\right)}{n}\right| \leq \frac{\left|\frac{z}{n}\right|}{n} = \frac{|z|}{n^2} \leq \frac{2}{n^2} := M_n$$

(*) $$\left|\operatorname{sen}\left(\frac{z}{n}\right)\right| \leq \left|\frac{z}{n}\right|$$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é uma p-série, com $p = 2 > 1$.

  Logo, convergente.

Então, pelo teste M de Weierstrass, segue que $\displaystyle\sum \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{z}{n}\right)}{n}$ converge uniformemente em $|z| \leq 2$.

(*) FICARÁ MOSTRADO APÓS VERMOS SÉRIE DE TAYLOR.

Além disso $f_n(z) = \dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{z}{n}\right)}{n}$ é holomorfa, $\forall z \in \mathbb{C}$, i.e., uma função inteira.

Então, a série pode ser derivada termo a termo, o número de vezes que quisermos e cada série derivada obtida será holomorfa no mesmo domínio.

Por exemplo, sendo $S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{z}{n}\right)}{n}$

$$\Rightarrow \quad S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{z}{n}\right)}{n} \right)' =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{z}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}}{n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{z}{n}\right)}{n^2}$$, também

uniformemente convergente, pelo teorema.

SÉRIES DE POTÊNCIAS

<u>Def.</u>: Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f_n(z) = a_n \cdot (z - z_0)^n$; onde a_n, z_0 são constantes, z_0 fixado.

Definimos a série de potências como a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n ;$$

onde a_n é o coeficiente, $\forall n$; e $a_n (z - z_0)^n$ chama-se termo geral da série.

LEMA DE ABEL: Suponha que a série

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ convirja para $z = z_1$. Então,

$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(z-z_0)^n|$ converge no disco

$$|z-z_0| < |z_1-z_0|$$

(ou seja, converge absolutamente)

DEMONSTR.: Suponha que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_1-z_0)^n$

seja convergente.

Logo, $a_n(z_1-z_0)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ [AULA 08]

Então $a_n(z_1-z_0)^n$ é limitada. Disso,

$\exists\, M>0$ tal que $|a_n(z_1-z_0)^n| \le M$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Assim:

$$|a_n (z-z_0)^n| = \left| a_n \frac{(z_1-z_0)^n}{(z_1-z_0)^n} \cdot (z-z_0)^n \right| =$$

$$= \underbrace{|a_n (z_1-z_0)^n|}_{\leq M} \cdot \left| \frac{(z-z_0)^n}{(z_1-z_0)^n} \right| \leq$$

$$\leq M \cdot \left(\underbrace{\frac{|z-z_0|}{|z_1-z_0|}}_{<1 \text{ se } |z-z_0|<|z_1-z_0|} \right)^n \quad ;$$

e então, a série geométrica

$$\sum M \left(\frac{|z-z_0|}{|z_1-z_0|} \right)^n \text{ é convergente quando}$$

$|z-z_0| < |z_1 - z_0|$

Logo, pelo teste da comparação (AULA 08),

a série $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n (z-z_0)^n|$ converge ; i.e;

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \text{converge absolutamente no}$$

disco $|z-z_0| < |z_1 - z_0|$.

$\square$

$\mathbb{C}$

<u>TEOREMA</u>. Para toda a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, existe um número $0 \leq R \leq \infty$ tal que; a série:

(i) converge absolutamente no disco $|z-z_0| < R$; se $0 < R \leq \infty$.

(ii) converge uniformemente no disco fechado $|z-z_0| \leq r < R$; se $0 \leq R < \infty$.

(iii) diverge na região $|z-z_0| > R$; $0 \leq R < \infty$.

<u>DEMONSTR.</u>: Suponha que a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ seja convergente para algum z. Defina o conjunto:

$$S = \left\{ r > 0 : \sum_{n=0}^{\infty} |a_n (z - z_0)^n| \text{ converge em } |z - z_0| < r \right\} \subset \mathbb{R},$$

e defina o número real R por:

$$R = \begin{cases} \sup S & \text{, se } S \text{ for limitado superiormente} \\ \infty & \text{, se } S \text{ for ilimitado} \end{cases}$$

Precisamos mostrar que tal R satisfaz os itens (i), (ii) e (iii)

(i) Seja $z_1 \neq z_0$ e considere $\rho > 0$, $\rho \in S$,

tal que $|z_1 - z_0| < \rho < R$.

Então a série $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n (z_1 - z_0)^n|$ converge.

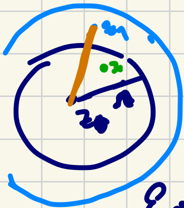
Então, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z_1 - z_0)^n$ converge absolutamente,

em $|z_1 - z_0| < \rho < R$.

Pela arbitrariedade da escolha do ponto z_1,

segue que $\sum a_n (z - z_0)^n$ converge absolutamente em $|z-z_0|<R$. Isso prova (i)

(ii) Seja $z_1 \neq z_0$ fixado e considere $0<r<R$, tal que



$$|z-z_0| \le r < R. \qquad (r \in S)$$

Então $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(z_1-z_0)^n|$ é convergente em $|z-z_0|<|z_1-z_0|$
(Abel)

Logo, $a_n(z_1-z_0)^n \to 0$. Então, é limitada,

i.e., $\exists$ $M>0$ tal que

$$|a_n(z_1-z_0)^n| \le M.$$

Assim:

$$|a_n(z-z_0)^n| = \left| a_n(z_1-z_0)^n \cdot \frac{(z-z_0)^n}{(z_1-z_0)^n} \right| =$$

$$= \underbrace{|a_n(z_1-z_0)^n|}_{\le M} \cdot \left(\frac{\overbrace{|z-z_0|}^{\le r}}{|z_1-z_0|} \right)^n \le M \cdot \left(\frac{r}{|z_1-z_0|} \right)^n := M_n$$

E então, • $|a_n(z-z_0)^n| \le M_n$; e

• $\sum_{n=0}^{\infty} M_n = M \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{|z_1-z_0|} \right)^n$ é série geométrica, que será convergente quando

$$|z_1 - z_0| > r.$$

$$|z - z_0| < r < |z_1 - z_0|$$

Ou seja, a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ é uniformemente convergente em $|z-z_0| \leq r < R$.

(iii) Mostrar que a série diverge em $|z-z_0| > R$.

Seja $z_1 \in \mathbb{C}$ tal que $|z_1 - z_0| > R$.

Por absurdo, se a série converge, i.e., se $\sum a_n (z_1 - z_0)^n$ for convergente no ponto z_1; pelo Lema de Abel, a série $\sum a_n (z-z_0)^n$ seria convergente absolutamente em $|z-z_0| < |z_1 - z_0|$.

Então: $|z_1 - z_0| \in S$, mas isso é um absurdo, pois $R = \sup S$ e $|z_1 - z_0| > R$.

Portanto, a série diverge na região $|z - z_0| > R$, onde $0 \leq R < \infty$.

$\square$

Obs.: O R do teorema acima chama-se **RAIO DE CONVERGÊNCIA** e o disco $|z-z_0|<R$ chama-se **DISCO DE CONVERGÊNCIA**

Ex.: Mostre que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n^2}$ converge absolutamente e uniformemente no disco $|z-i|\leq 1$.

(EXERCÍCIO).
