VARIÁVEIS COMPLEXAS

18/07/25 - AULA 22

TEOREMA DE MORERA Seja $f: \Omega \to \mathbb{C}$ uma função contínua na região Ω. Se $\int_\gamma f(z)dz = 0$, para todo caminho fechado γ, então f é holomorfa em Ω.

obs.: Note que este resultado é um tipo de recíproca do teorema de Cauchy-Goursat.

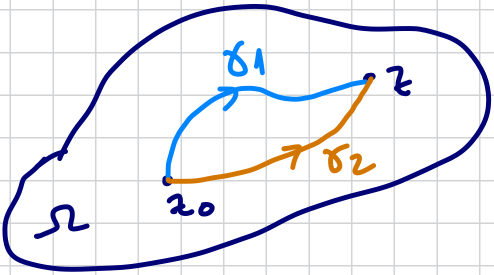
[$f \in \mathcal{O}(\Omega) \Rightarrow \int_\gamma f = 0$, $\forall \gamma$ caminho fechado]

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA:

Seja $z_0 \in \Omega$ e defina $F: \Omega \to \mathbb{C}$ por

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(w)\,dw$$

Como $\int_\gamma f(z)dz = 0$, por hipótese, temos que esta integral independe do caminho γ (γ - caminho fechado)



Sendo, γ_1 e γ_2 dois caminhos de z_0 até um ponto z, então

$$\gamma := \gamma_1 \vee (-\gamma_2) \text{ é}$$

um caminho fechado; e disso:

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$$

Pelo T. da primitiva, F é tal que

$$F'(z) = f(z).$$

Pela fórmula geral de Cauchy, temos

que $\quad F'(z) \in \mathcal{O}(\Omega)$; e como

$F'(z) = f(z)$, segue que $f(z) \in \mathcal{O}(\Omega)$.

$\square$

TEOREMA DE LIOUVILLE: Se f for uma função inteira, i.e., $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, e além disso, for limitada, então f é constante.

DEMONSTR.: Seja $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$; e f limitada.

Sendo limitada, segue que $\exists M > 0$ tal que

$$|f(z)| \leq M, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Dado $z \in \mathbb{C}$ um ponto qualquer e seja $R > 0$. Então, aplicando a desigualdade de Cauchy(*) para $f'(z)$ em $D_R(z)$, temos:

$$|f'(z)| \leq \frac{M \cdot 1!}{R^1} = \frac{M}{R}$$

E, como $|f'(z)| \leq \frac{M}{R} \xrightarrow[R \to \infty]{} 0$; ou seja,

$$f'(z) = 0, \ \forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow f(z) \text{ é constante}$$

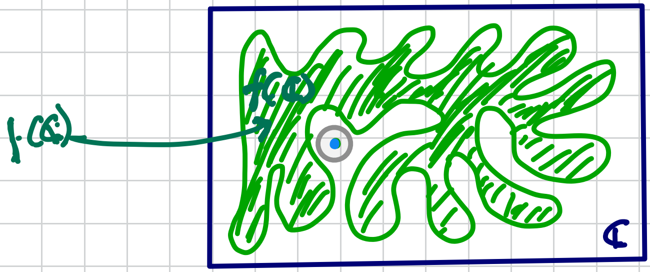
$\square$

(*) $|f^{(n)}(z)| \leq \dfrac{M \cdot n!}{R^n}$; onde $M > 0$ é tal que $|f(z)| \leq M$.

COROLÁRIO: Se f é inteira, mas não constante, então sua imagem $f(\mathbb{C})$ é densa em $\mathbb{C}$.

DEMONSTR.: Seja $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$; f não constante.

Por absurdo, suponha que o conjunto imagem $f(\mathbb{C})$ não seja denso em $\mathbb{C}$.



Então, $\exists\, a \in \mathbb{C}$ e $\exists\, R>0$, tais que $D_R(a) \cap f(\mathbb{C}) = \emptyset$

Define $g: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ por

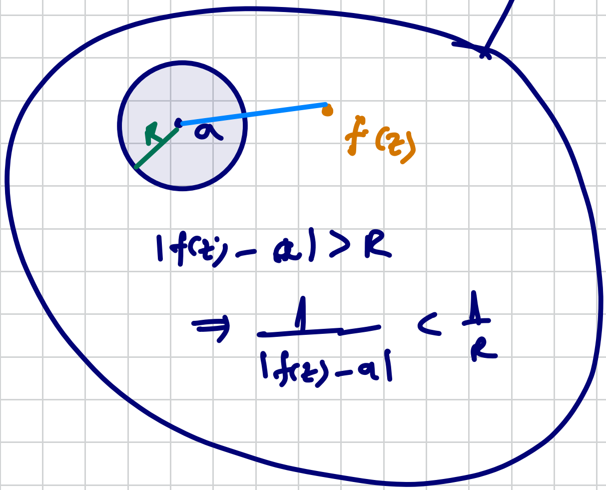
$$g(z) = \frac{1}{f(z)-a}.$$

Note que, por construção $f(z) \neq a$, $\forall z \in \mathbb{C}$, pois $D_R(a) \cap f(\mathbb{C}) = \emptyset$.

Além disso, g é holomorfa, pois f o é.

Note também que:

$$|g(z)| = \left|\frac{1}{f(z)-a}\right| = \frac{1}{|f(z)-a|} < \frac{1}{R}$$



Então, g é limitada; e também holomorfa em $\mathbb{C}$; ou seja, g é inteira e limitada.

Pelo T. de Liouville, segue que $g(z) = \beta \in \mathbb{C}$; β uma constante.

Dessa forma, tem-se:

$$\beta = g(z) = \frac{1}{f(z)-a}$$

$\Rightarrow f(z)$ é constante; uma contradição!

Portanto, $f(\mathbb{C})$ é denso em $\mathbb{C}$. $\square$

EXEMPLO DE APLICAÇÃO: (LISTA 10: exercício 26)

Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa, $f(z) = u + iv$, onde $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Suponha que $\exists\, M \in \mathbb{R}$ tal que $u(x,y) \leq M$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Prove que f é constante. [sugestão: use $g(z) := e^{f(z)}$]

SOLUÇÃO: Defina $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g(z) = e^{f(z)}$.

$g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Além disso;

$$|g(z)| = |e^{f(z)}| = |e^{u+iv}| = |e^{u} \cdot e^{iv}| =$$

$$= |e^{u}| = e^{u} \leq e^{M} := K > 0$$

em $\mathbb{R}$.

$u \leq M \Rightarrow e^{u} \leq e^{M}$

Ou seja; $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ e $|g(z)| \leq K$

Pelo T. de Liouville segue que g é uma constante, ou seja, $g(z) = \alpha \in \mathbb{C}$. Assim:

$$\alpha = g(z) = e^{f(z)}$$

$$\Rightarrow f(z) = \log \alpha$$ é constante (mesmo sendo plurívoca) (no ramo principal)

TEOREMA DO VALOR MÉDIO OU DE GAUSS

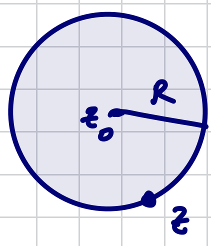
Suponha que f seja holomorfa no disco fechado

$$\overline{D_R(z_0)} = \{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \le R \}.$$

Então,
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + R \cdot e^{i\theta})\, d\theta.$$

DEMONSTR.: Pela fórmula integral de Cauchy, tem-se:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_R(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz .$$



Escreva $z = z_0 + R \cdot e^{i\theta}$.

Disso, tem-se que: $dz = R i \cdot e^{i\theta} d\theta$, ; $\theta \in [0, 2\pi]$

Assim:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi \cancel{i}} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{i\theta}) \cdot \cancel{R} \cdot \cancel{i} \cdot \cancel{e^{i\theta}} \cdot d\theta}{\cancel{R} \cdot \cancel{e^{i\theta}}}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\theta}) \cdot d\theta.$$

$\square$

EXERCÍCIO PARA ENTREGAR NA QUARTA, 23/07 :

LISTA 10 ; nº 14

SEQUÊNCIAS DE FUNÇÕES COMPLEXAS

Def.: Chama-se sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a lista infinita

$$(f_n(z)) = (f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z); \dots);$$

onde cada $f_j : \Omega \to \mathbb{C}$ é uma função complexa.

Obviamente, fixado $z_0 \in \Omega$, então $(f_n(z_0))$ é uma sequência numérica complexa.

Ex.: $(f_n) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sequência definida por $f_n(z) = \dfrac{z}{n}$. Neste caso, temos

$$f_1(z) = z$$

$$f_2(z) = \frac{z}{2}$$

$$f_3(z) = \frac{z}{3}$$

$$\vdots$$

conjecturamos: $f_n(z) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Def.: Dada uma sequência $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$;

dizemos que:

(1) f_n converge para $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ <u>simplesmente</u>,

e escrevemos $f_n \to f$ se, e somente se:

$\forall z \in \mathbb{C}$; $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, tal que, $\forall n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$.

(2) f_n converge para $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ <u>uniformemente</u>,

e escrevemos $f_n \rightrightarrows f$ se, e somente se:

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, tal que, $\forall z \in \mathbb{C}$, $\forall n \geq n_0 \Longrightarrow |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$.

Note que a diferença entre convergência simples e uniforme é útil: na convergência simples, o n_0 depende de ε e do ponto z; ou seja, $n_0 = n_0(\varepsilon, z)$, e dessa forma a convergência simples também é chamada de convergência pontual.

Já na convergência uniforme o n_0 depende apenas da escolha do ε; ou seja, $n_0 = n_0(\varepsilon)$.

A função f à qual $f_n \to f$ chama-se <u>FUNÇÃO LIMITE</u>.