

Universidade Federal de Pelotas
Disciplina de Cálculo II
Curso de Lic. em matemática
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 07 de Exercícios - Problemas aplicados

1. Considere uma mola com uma das extremidades fixa e suponha que a origem $x = 0$ coincida com a extremidade livre da mola, quando esta se encontra em seu estado normal (não distendida). Se a mola for distendida ou comprimida até que sua extremidade livre se desloque à posição x , a mola exerce sobre o agente que a deforma uma força cujo valor, em boa aproximação, será

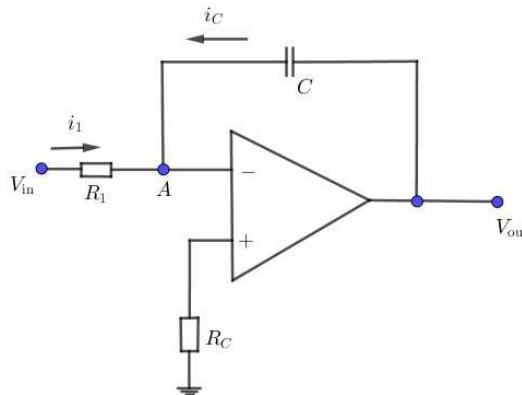
$$\vec{F}(x) = -kx\vec{i} \text{ (lei de Hooke),}$$

onde k é uma constante denominada *constante elástica* da mola. Suponha que a mola seja distendida e presa na sua extremidade livre uma partícula. Supondo $k = 5$, calcule o trabalho realizado pela mola quando a partícula se desloca da posição $x = 0,2$ para $x = 0$.
 (Resp.: 0,1 J)

2. **(Integração eletrônica)** O integrador eletrônico é um circuito cuja saída é a integral do sinal de entrada. Ou seja,

$$V_{\text{out}}(t) = \int V_{\text{in}}(t)dt,$$

onde $V_{\text{in}}(t)$ é a tensão de entrada, em função do tempo e $V_{\text{out}}(t)$ a tensão de saída em função do tempo. Abaixo é apresentado o esquema de um circuito integrador ideal, utilizando amplificador operacional.



No nó A temos a seguinte igualdade entre as correntes elétricas i_1 e i_C destacadas: $i_1 = -i_C$, onde

$$i_1 = \frac{V_1}{R_1} \quad \text{e} \quad i_C = -C \frac{dV}{dt},$$

com $V_1 = V_1(t)$ e a resistência R_1 e a capacidade C são constantes.

- (a) Com as igualdades acima, mostre que a tensão de saída fica dada por

$$V_{\text{out}}(t) = -\frac{1}{R_1 \cdot C} \int V_1(t)dt.$$

- (b) Para o circuito integrador com amplificador operacional, com resistor $R_1 = 100K\Omega$ e capacitor $C = 0,01\mu F$, calcule a tensão de pico¹ na saída, se a tensão de entrada é dada por $V_{\text{in}} = \frac{1}{2}\sin(100t)$.

- (c) Ainda para $R_1 = 100K\Omega$ e $C = 0,01\mu F$, escreva a expressão para a saída quando $V_{\text{in}} = 2 + 2 \cos 100t$.

¹A tensão de pico é a altura máxima, em módulo, do gráfico da função.

3. Se a aceleração de uma partícula que se move com velocidade variável v é $-kv^2$, onde k é uma constante e se v_0 é a velocidade quando $t = 0$, mostre que

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} + kt.$$

4. De acordo com a lei da gravitação de Newton, duas partículas quaisquer de massas M e m se atraem com uma força F cuja grandeza é diretamente proporcional ao produto das massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância r entre elas, ou seja,

$$F = G \frac{Mm}{r^2},$$

onde G chama-se *constante de gravitação*. Se M está fixado na origem, qual o trabalho exigido para mover m de $r = a$ para $r = b$, onde $a < b$? Obs.: O *elemento de trabalho* é dado por $dW = Fdr$. (Resp.: $W = GMm(\frac{1}{a} - \frac{1}{b})$).

5. A resistência do ar de um automóvel, dentro de certos limites de velocidade, é proporcional à velocidade. Assim, se F é a força líquida gerada pelo motor, temos

$$M \frac{dv}{dt} = F - kv.$$

Exprima a velocidade em termos de t , sabendo que $v = 0$ quando $t = 0$.

(Resp.: $v = \frac{F}{k}(1 - e^{-\frac{kt}{M}})$)

6. **(Decaimento radioativo)** Se N é o número de átomos radioativos presente num certo material em um instante de tempo t , então, a equação que descreve o decaimento é dada por

$$-\frac{dN}{dt} = \lambda N,$$

que estabelece que a variação de cimento do material radioativo em relação ao tempo é proporcional à massa de material radioativo no referido instante de tempo, onde λ é a constante de decaimento. Se N_0 é o número de átomos radioativos no instante inicial $t = 0$ e N é o número de átomos no instante t , mostre que a equação acima determina $N = N_0 e^{-\lambda t}$.

7. **(Plutônio 239)** A meia-vida do isótopo do plutônio é de 24360 anos. Se 10 g de plutônio forem lançados na atmosfera por um acidente nuclear, quantos anos levará para que 80% do isótopo decaia?

8. **(Reações químicas de Primeira Ordem)** Em algumas reações químicas, a taxa à qual a quantidade de uma substância varia em relação ao tempo é proporcional à quantidade presente. Para a transformação da δ -glucono lactona em ácido glucônico, por exemplo,

$$\frac{dy}{dt} = -0,6y,$$

onde t é medido em horas. Se houver 100 g de δ -glucono lactona presentes quando $t = 0$, quantos gramas restarão depois da primeira hora? (Resp.: 54,88 g)

9. **(Voltagem de um capacitor sendo descarregado)** Suponha que as cargas elétricas acumuladas em um capacitor estejam escapando através de seus terminais a uma taxa proporcional à voltagem V e que, se t for medido em segundos,

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{40}V.$$

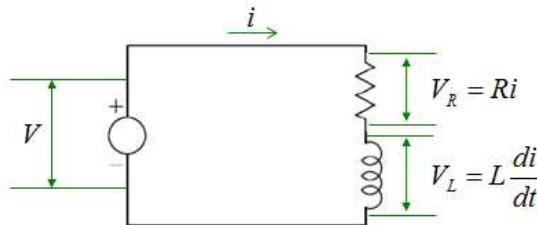
Encontre V nessa equação, usando a notação V_0 para denotar o valor de V quando $t = 0$. Quanto tempo a voltagem demorará para atingir 10% de seu valor inicial?

10. Seja K a constante de equilíbrio para a formação de CO_2 e H_2 a partir de CO e H_2O para uma dada temperatura T . Da Termodinâmica sabe-se que

$$\frac{d}{dT} \ln K = \frac{\Delta H^*}{RT^2}.$$

Assumindo que ΔH^* independa da temperatura, integre a equação acima para mostrar que $\ln K$ varia com a temperatura T . (Resp.: $\ln K = -\frac{\Delta H^*}{RT} + c$)

11. Considere o circuito RL -série conforme o esquema abaixo, formado por um indutor de indutância L Henrys, um resistor de resistência R Ohms e uma fonte de tensão V volts.



Se i for a corrente elétrica no circuito, a queda de tensão sobre o resistor R é dada por $V_R = R \cdot i$, já a queda de tensão sobre o indutor L será $V_L = L \cdot \frac{di}{dt}$. Então, pela lei das tensões de Kirchoff tem-se que

$$V = V_R + V_L.$$

- (a) Sabendo que quando $t = 0$ tem-se $i = 0$, mostre que a corrente elétrica $i = i(t)$ é dada por

$$i = \frac{V}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right).$$

- (b) Se $R = 10\Omega$, $L = 3H$ e $V = 50$ volts, determine a corrente elétrica $i = i(t)$ em função do tempo.

12. Numa certa região bárbara, duas tribos vizinhas têm-se odiado desde os tempos primitivos. Sendo povos bárbaros, seus poderes de crença são fortes e uma solene praga rogada pelo curandeiro da primeira tribo enlouquece os membros da segunda tribo conduzindo-os ao assassinato e suicídio. Se a taxa de variação da população P da segunda tribo é $-\sqrt{P}$ pessoas por semana e se a população é de 676 quando a praga é rogada, quando eles estarão todos mortos?