

VOLUMES DE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO:

Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável.

Assuma (por simplicidade na notação) $f \geq 0$.

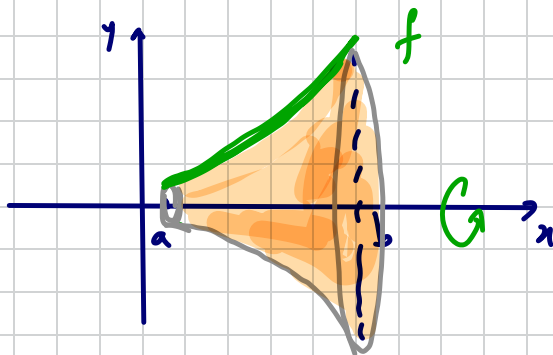
Vamos determinar o volume do sólido S obtido ao girar a região determinada pelo gráfico de f e um dos eixos coordenados, em relação ao referido eixo, num dado intervalo.

A saber, existem dois métodos: o método do disco, que veremos hoje e o método do invólucro cilíndrico, que será visto na próxima aula.

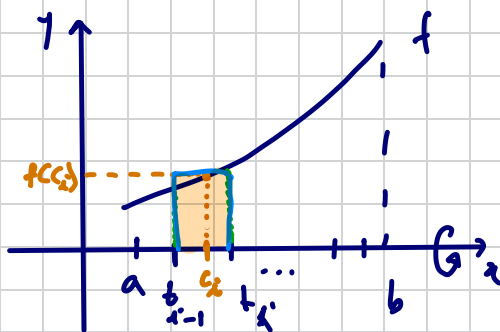
MÉTODO DO DISCO: Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrável,

e $f \geq 0$ (para simplificar a visualização geométrica)

Ao girar em torno do eixo horizontal OX , obtemos o sólido S .

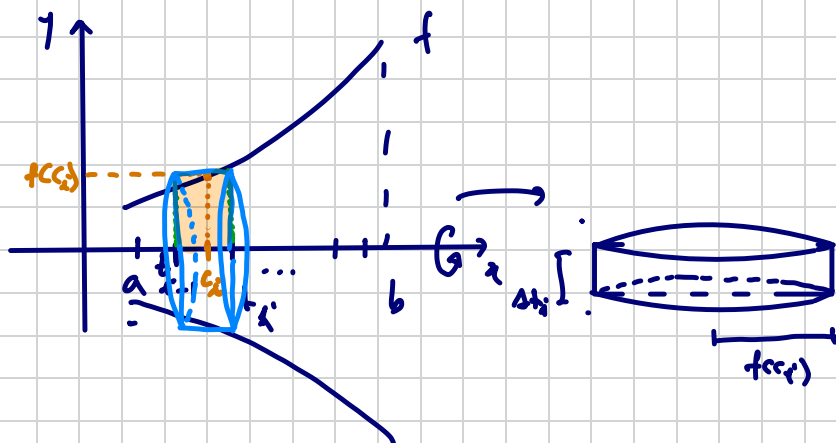


Seja $P = \{a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b\}$ uma partição qualquer do intervalo $[a, b]$, determinando subintervalos de forma $[t_{i-1}, t_i]$. Considere $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$, e tome $f(c_i)$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.



formamos n retângulos elementares de base $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ e altura $f(c_i)$.

Girando essa região, e, conseqüentemente, os n retângulos, vamos obter n cilindros ou discos de altura Δt_i e raio da base $f(c_i)$:



Seja V_i o volume do i -ésimo disco, temos:

$$V_i = A_b \cdot h = \pi r^2 \cdot h = \pi (f(c_i))^2 \cdot \Delta x_i$$

A medida do volume aproximado $\tilde{V}$ é dado por,

$$\tilde{V} = \sum_{i=1}^n V_i = \sum_{i=1}^n \pi \cdot [f(c_i)]^2 \cdot \Delta x_i,$$

uma soma de Riemann.

A medida do volume V será dada por:

$$\begin{aligned} V &= \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{V} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \pi [f(c_i)]^2 \cdot \Delta x_i \\ &= \int_a^b \pi \cdot [f(x)]^2 dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx. \end{aligned}$$

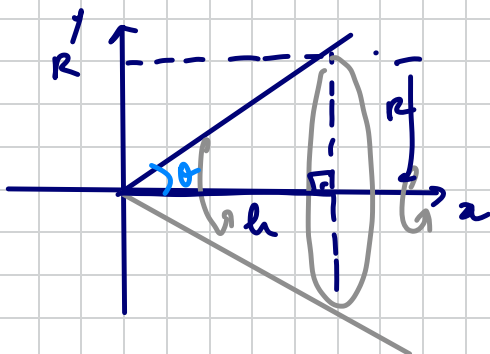
conclusão:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Fórmula do volume do sólido girando ao redor do eixo OX , pelo método do disco.

Ex^o 01) Use o método do disco para deduzir a fórmula do volume de um cone de raio R e altura h .

Solução: Seja f uma reta passando pela origem do plano cartesiano:



$y = mx$; onde
 m é a inclinação
da reta.

$$m = \tan \theta = \frac{R}{h}$$

reta. $y = \frac{R}{h} x$; $f(x) = \frac{R}{h} x$;

$$f: [0, h] \rightarrow \mathbb{R}$$

Assim, a medida do volume V será dada por:

$$\underline{V} = \pi \cdot \int_0^h [f(x)]^2 dx = \pi \cdot \int_0^h \left[\frac{R}{h} x \right]^2 dx =$$

$$\pi \int_0^h \frac{R^2}{h^2} \cdot x^2 dx = \frac{\pi R^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx =$$

$$= \frac{\pi R^2}{h^2} \cdot \left(\frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^h = \frac{\pi R^2}{h^2} \cdot \left(\frac{h^3}{3} - 0 \right)$$

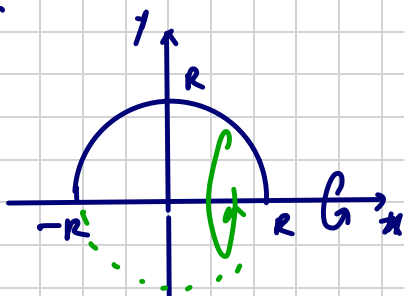
$$= \frac{\pi R^2 h^3}{3 \cancel{h^2}} = \underline{\underline{\frac{\pi R^2 h}{3}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{V = \frac{\pi R^2 h}{3}}$$

02) Analogamente, mostre que a medida do volume de uma esfera de raio R é dada por

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Solução:



considere a circunf.

$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$\Rightarrow y^2 = R^2 - x^2$$

$$\Rightarrow y = +\sqrt{R^2 - x^2}$$

↑
semi-circunf.

$$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2} ; f: [-R, R] \rightarrow \mathbb{R}$$

Então a medida do volume V será:

$$V = \pi \cdot \int_{-R}^R [f(x)]^2 dx = \pi \cdot \int_{-R}^R (\sqrt{R^2 - x^2})^2 dx$$

$$= \pi \cdot \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = \pi \cdot \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-R}^R =$$

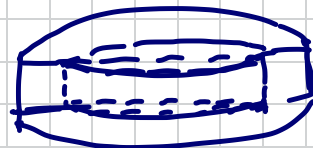
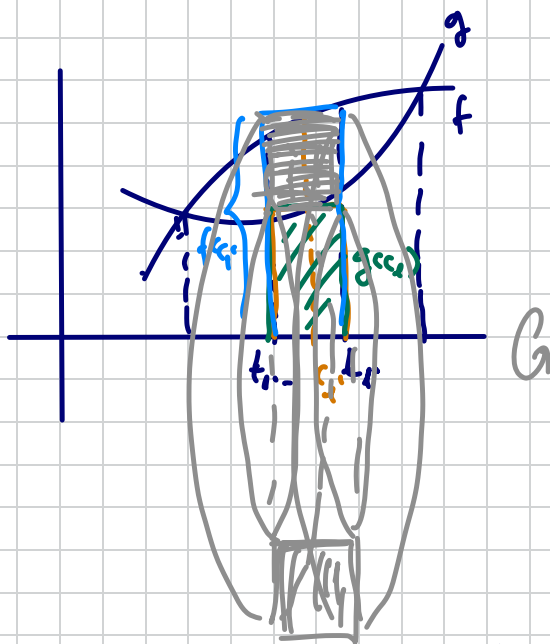
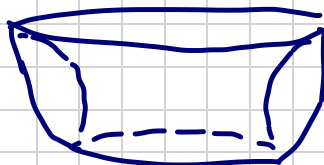
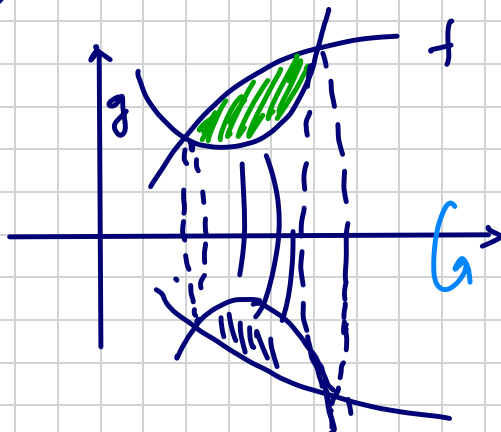
$$= \pi \cdot \left(R^2 \cdot R - \frac{R^3}{3} - \left(R^2 \cdot (-R) - \frac{(-R)^3}{3} \right) \right)$$

$$= \pi \cdot \left(R^3 - \frac{R^3}{3} + R^3 - \frac{R^3}{3} \right)$$

$$= \pi \cdot \left(2R^3 - \frac{2R^3}{3} \right) = 2 \left(R^3 - \frac{R^3}{3} \right)$$

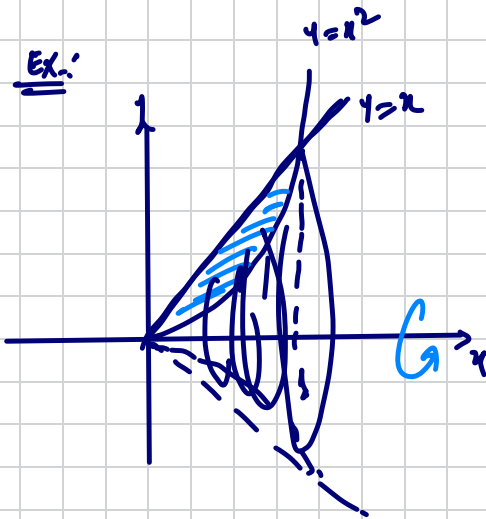
$$= 2\pi \cdot \left(\frac{3R^3 - R^3}{3} \right) = \frac{4\pi R^3}{3} //$$

VOLUME DE SÓLIDO "VAZADO". Quando temos uma região delimitada por duas funções:



$$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 dx - \pi \cdot \int_a^b [g(x)]^2 dx =$$

$$= \pi \cdot \int_a^b (f(x)^2 - g(x)^2) dx.$$



$$V = \pi \cdot \int_0^1 [(x)^2 - (x^2)^2] dx$$

$$= \pi \cdot \int_0^1 (x^2 - x^4) dx =$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 =$$

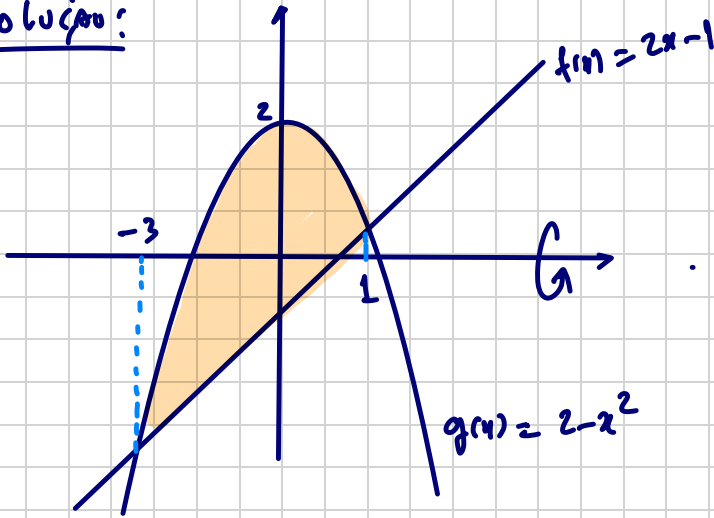
$$= \pi \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} - 0 \right)$$

$$= \pi \left(\frac{5-3}{15} \right) = \frac{2\pi}{15} \text{ u.r.}$$

(UNIDADES
DE
VOLUME)

ex: Calcule o volume da sólida S formada ao girar a região delimitada pelos gráficos de $y = 2x - 1$ e $y = 2 - x^2$, em torno do eixo ox .

solução:



interception:

$$2x - 1 = 2 - x^2$$

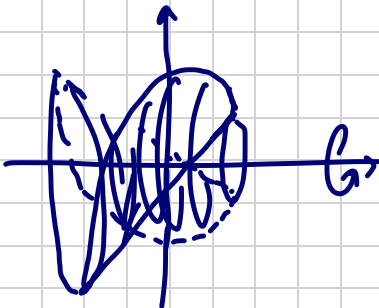
$$x^2 + 2x - 1 - 2 = 0$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2}$$

$$x = \frac{-2 + 4}{2} = 1$$

$$x = \frac{-2 - 4}{2} = -3$$



$$V = \pi \cdot \int_{-3}^1 (2-x^2)^2 dx - \pi \int_{-3}^1 (2x-1)^2 dx$$

$$= \pi \int_{-3}^1 (4 - 4x^2 + x^4) dx - \pi \int_{-3}^1 (4x^2 - 4x + 1) dx$$

$$= \pi \cdot \int_{-3}^1 (4 - 4x^2 + x^4 - 4x^2 + 4x - 1) dx$$

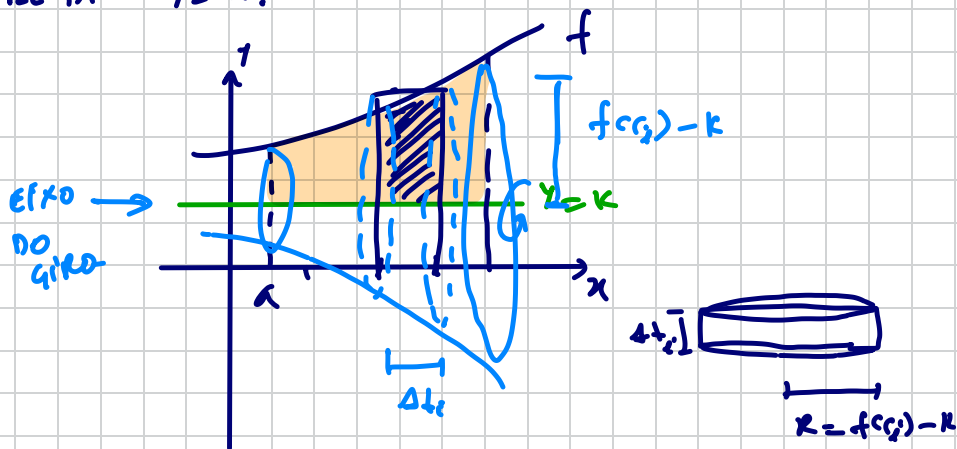
$$= \pi \int_{-3}^1 (3 + 4x - 8x^2 + x^4) dx$$

$$= \pi \cdot \left(3x - \frac{4x^2}{2} - \frac{8x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_{-3}^1 = \dots \text{etc.}$$



VOLUME DO SÓLIDO OBTIDO AO GIRAR EM TORNO

DE UMA RETA $y = k$:



$$\tilde{V} = \sum_{i=1}^n V_i$$

$$V_i = \pi \cdot (f(x_i) - k)^2 \cdot \Delta x_i$$

$$= \sum_{i=1}^n \pi \cdot (f(x_i) - k)^2 \cdot \Delta x_i$$

(SOMA DE RIEMANN)

Assim; $V = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{V} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \pi \cdot (f(x_i) - k)^2 \Delta x_i$

$$= \int_a^b \pi \cdot (f(x) - k)^2 \cdot dx =$$

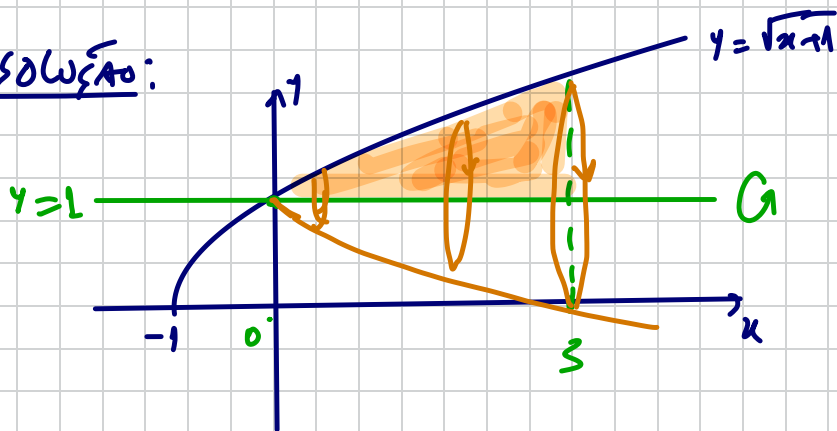
$$= \pi \cdot \int_a^b (f(x) - k)^2 \cdot dx$$

Quando se gira o gráfico de f em torno de uma reta $y=k$ (paralela ao eixo OX), pelo método do disco, a medida do volume V do sólido obtido será dada por

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x) - k)^2 \cdot dx$$

Ex: Obter o volume do sólido S obtido ao girar o gráfico de $y = \sqrt{x+1}$ ao longo da reta $y=1$ no intervalo $[0, 3]$.

Solução:



$$x=0, y=1$$

$$V = \pi \cdot \int_0^3 [f(x) - 1]^2 dx =$$

$$= \pi \int_0^3 [\sqrt{x+1} - 1]^2 dx =$$

$$= \pi \int_0^3 (x+1 - 2\sqrt{x+1} + 1) dx =$$

$$= \pi \cdot \int_0^3 (x+2) dx - 2\pi \int_0^3 \sqrt{x+1} dx. \quad \textcircled{=}$$

$$\bullet \int (x+2) dx = \frac{x^2}{2} + 2x + c$$

$$\bullet \int \sqrt{x+1} dx = \int (x+1)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$\begin{array}{l} \uparrow \\ u = x+1 \\ du = dx \end{array}$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{(x+1)^3} + c$$

$$= \frac{2}{3} (x+1) \sqrt{x+1} + c$$

$$\Rightarrow \pi \cdot \left(\frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_0^3 - 2\pi \left(\frac{2}{3} (x+1) \sqrt{x+1} \right) \Big|_0^3 =$$

$$\pi \cdot \left(\frac{9}{2} + 6 - 0 \right) - 2\pi \left(\frac{2}{3} \cdot 4 \cdot \sqrt{4} - \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot \sqrt{1} \right)$$

$$\pi \cdot \left(\frac{21}{2} \right) - 2\pi \cdot \left(\frac{16}{3} - \frac{2}{3} \right) =$$

$$= \frac{21\pi}{2} - \frac{28\pi}{3} = \frac{63\pi - 56\pi}{6} = \underline{\underline{\frac{7\pi}{6} \text{ u.r.}}}$$