

No final da aula passada vimos o importante teste M de WEIERSTRASS, que estabelece que: sendo (M_n) uma sequência real, e tal que:

- $|f_n(z)| \leq M_n$, $\forall z \in \Omega$ e $\forall n \in \mathbb{N}$;
- $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ é convergente;

então a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ é absolutamente convergente e uniformemente convergente em Ω .

Vejam alguns exemplos de aplicação:

01) A série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ converge absolutamente na região onde $|z| < 1$ e uniformemente na região onde $|z| \leq r < 1$.

De fato, sendo $f_n(z) = z^n$, temos que

$$|f_n(z)| = |z^n| = \underbrace{|z|^n}_{< 1}; \text{ então:}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)| = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{|z|^n}_{< 1} \text{ é uma série (real)}$$

convergente (série real geométrica de razão < 1);

e, portanto, $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$ é convergente, e logo,

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ é absolutamente convergente.

Basta mostrar que tal série é uniformemente convergente no disco fechado $\overline{D}_r(0)$; $r < 1$; ou seja, onde $|z| \leq r < 1$.

De fato, considere a sequência real (M_n) dada por $M_n = r^n$ ($r < 1$).

Assim, tem-se que:

- $|f_n(z)| = |z^n| = |z|^n \leq r^n = M_n$;
- $\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \sum_{n=1}^{\infty} r^n$, que é convergente,

por ser uma série geométrica de razão $r < 1$.

Portanto, pelo teste M de Weierstrass, segue a convergência uniforme da série $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ em $\overline{D(0, r)}$, $r < 1$.

02) A função zeta de Riemann é dada pela série

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}.$$

Vamos mostrar que esta série converge absolutamente na região onde $\operatorname{Re}(z) > 1$ e converge uniformemente na região onde $\operatorname{Re}(z) \geq 1 + \varepsilon$; $\varepsilon > 0$.

Primeiramente, note que, sendo $f_n(z) = \frac{1}{n^z}$, temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^z} &= n^{-z} = e^{\overbrace{-z \log n}^{\in \mathbb{R}}} = e^{(x-iy) \cdot \log n} = \\ &= \underbrace{e^{-x \log n}}_p \cdot \underbrace{e^{-iy \log n}}_{p e^{i\theta}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |f_n(z)| &= \left| \frac{1}{n^z} \right| = e^{-x \log n} = e^{\log n^{-x}} = \\ &= n^{-x} = \frac{1}{n^x} \end{aligned}$$

Dessa forma ; se $\operatorname{Re}(z) > 1$. (i.e.; $x > 1$);
temos:

$$|f_n(z)| = \frac{1}{n^x}; \quad \text{e limo:}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}; \quad x > 1; \quad \text{que é}$$

uma p-série com $p = x > 1$, logo, convergente.

Portanto, $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$ é convergente em $\operatorname{Re}(z) > 1$;

i.e.; $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ é absolutamente convergente

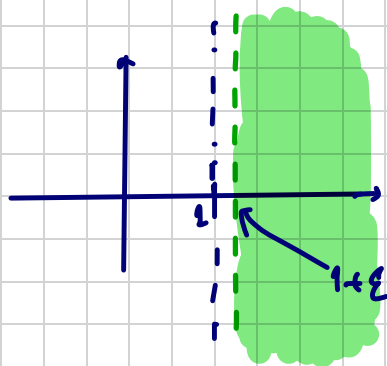
em $\operatorname{Re}(z) > 1$; i.e.; $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ é

absolutamente convergente onde $\operatorname{Re}(z) > 1$.

Considere agora o caso onde $\operatorname{Re}(z) \geq 1 + \varepsilon$,
para algum $\varepsilon > 0$ dado.

$$\text{Seja } f_n(z) = \frac{1}{n^z},$$

temos que:



- $|f_n(z)| = \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} := M_n$

$$\begin{aligned}
 & x \geq 1 + \varepsilon \\
 \Rightarrow & n^x \geq n^{1+\varepsilon} \\
 \Rightarrow & \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}
 \end{aligned}$$

- $\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$, que é uma p-série, com $p = 1 + \varepsilon > 1$; e, portanto, convergente.

Logo, pelo teste M de Weierstrass, segue que

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ é uniformemente convergente onde

$$\operatorname{Re}(z) \geq 1 + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

03) Seja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3z)^n}{n(n+1)}$. Mostre que esta série converge uniformemente na região onde $|z| \leq \frac{1}{3}$.

Solução: Note que, sendo $f_n(z) = \frac{3^n \cdot z^n}{n(n+1)}$, temos:

$$\bullet |f_n(z)| = \frac{3^n \cdot |z|^n}{n(n+1)} \leq \frac{3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} := M_n;$$

$|z| \leq \frac{1}{3}$

$$\bullet \sum_{n=1}^{\infty} M_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{é convergente}$$

(série "telescópica")

Então, pela teste M de Weierstrass segue que a série dada converge uniformemente na região onde $|z| \leq \frac{1}{3}$.

PROPOSIÇÃO: Se a série $S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ é uniformemente convergente em Ω e se cada $f_n(z)$ for contínua em um ponto $z_0 \in \Omega$, então a soma da série $S(z)$ será contínua em z_0 .

DEMONSTRAÇÃO: Seja $S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ uniformemente convergente em Ω . Então, sendo $S_n(z)$ a soma parcial da série, temos que;

Dado $\varepsilon > 0$,

$\exists m_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq m_0, \forall z \in \Omega$; segue que

$$|S_n(z) - S(z)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (*)$$

Além disso, tem-se que, cada f_n é contínua no ponto $z_0 \in \Omega$, e então,

$$S_n(z) = \sum_{k=1}^n f_k(z)$$

será contínua em z_0 , pois $S_n(z)$ é uma soma finita de funções contínuas em z_0 .

Assim, para $\varepsilon > 0$ dada acima, tem-se que
 $\exists \delta > 0$ tal que, $\forall h \in \mathbb{C}$, tal que $|h| < \delta$,
 implica em

$$|S_n(z_0+h) - S_n(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (**)$$

obs.:

$$\forall z: \underbrace{|z - z_0|}_{h} < \delta \quad z - z_0 = h$$

$$\Rightarrow |S_n(\underbrace{z}_{z_0+h}) - S_n(z_0)| < \varepsilon.$$

Disso, para $h \in \mathbb{C}$ tal que $|h| < \delta$ e para $n \geq n_0$,
 valemos (†) e (**).

Analisando $|S(z_0+h) - S(z_0)|$, temos:

$$\begin{aligned} |S(z_0+h) - S(z_0)| &= \\ &= |(S(z_0+h) - S_n(z_0+h)) + (S_n(z_0+h) - S_n(z_0)) + (S_n(z_0) - S(z_0))| \leq \\ &\leq \underbrace{|S(z_0+h) - S_n(z_0+h)|}_{< \frac{\varepsilon}{3}, \text{ por (†)}} + \underbrace{|S_n(z_0+h) - S_n(z_0)|}_{< \frac{\varepsilon}{3}, \text{ por (**)}} + \underbrace{|S_n(z_0) - S(z_0)|}_{< \frac{\varepsilon}{3}, \text{ por (†)}} \end{aligned}$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon ;$$

ou seja, mostramos que $|S(z_0+h) - S(z_0)| < \varepsilon$,
sempre que $|h| < \delta$; isto é, mostramos que
 $S(z)$ é contínua em z_0 .

□

TEOREMA: Seja (f_n) uma sequência de funções
complexas $f_n: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tais que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge unifor-
memente para $S: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, isto é,

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = S(z), \quad \forall z \in \Omega, \text{ uniformemente,}$$

onde as f_n são contínuas em uma curva mais
por partes $\gamma \subset \Omega$; então:

$$\int_{\gamma} S(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz$$

(ou seja, uma série complexa uniformemente
convergente pode ser integrada termo a termo)

DEMONSTR: Como a série $S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$

é uniformemente convergente, segue que a sequência (S_n) das somas parciais da série é uniformemente convergente.

Como f_n são contínuas em $\delta \subset \mathbb{C}$, $\forall n$, em particular são contínuas em todo ponto sobre δ . Pela proposição anterior, segue que $S(z)$ é contínua em $\delta \subset \mathbb{C}$.

Logo, $S(z)$ é integrável em γ . (*)

Pela continuidade uniforme para (S_n) , temos que,

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq n_0$, implica em

$$|S_n(z) - S(z)| < \varepsilon, \quad \forall z \in \gamma.$$

Analisando $\left| \int_{\gamma} (S_n(z) - S(z)) dz \right|$, temos:

$$\left| \int_{\gamma} (S_n(z) - S(z)) dz \right| \leq \int_{\gamma} \underbrace{|S_n(z) - S(z)|}_{< \varepsilon} |dz| <$$

$$\int_{\gamma} \varepsilon \cdot |dz| = \varepsilon \cdot \int_{\gamma} |dz| = \varepsilon \cdot l;$$

onde l denota o comprimento de γ .

Assim, como $\varepsilon > 0$ é pequeno; tomando o limite com $n \rightarrow \infty$, temos obter:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{\gamma} (S_n(z) - S(z)) dz \right| = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} (S_n(z) - S(z)) dz = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} S_n(z) dz - \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\int_{\gamma} S(z) dz}_{\text{const.}} = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} S_n(z) dz = \int_{\gamma} S(z) dz$$

□