

FÓRMULAS INTEGRAIS

Def.: Sejam $\Omega \subset \mathbb{C}$; $a \in \Omega$ e $f: \Omega \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$.

Dizemos que f é limitada no ponto a se
 $\exists R > 0$ tal que f fica limitada em $(D_R(a) \cap \Omega) \setminus \{a\}$;
ou seja, se $\exists M > 0$ tal que

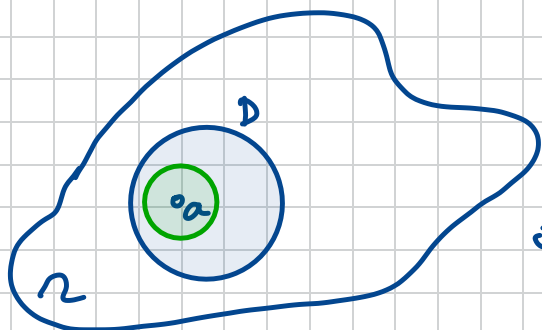
$$|f(z)| \leq M; \quad \forall z \in (D_R(a) \cap \Omega) \setminus \{a\}.$$

LEMMA: Seja Ω uma região de $\mathbb{C}$. Se $f \in O(\Omega \setminus \{a\})$
e for limitada localmente em a , então, para
qualquer disco D , com $a \in D$, onde $\bar{D} \subset \Omega$, tem-se
que

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 0.$$

DEMONSTRAÇÃO: Seja $f: \Omega \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa
em $\Omega \setminus \{a\}$; limitada em a .

Seja D um disco contendo o ponto a , tal que $\bar{D} \subset \Omega$.



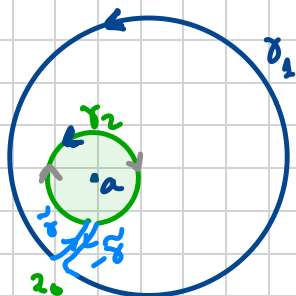
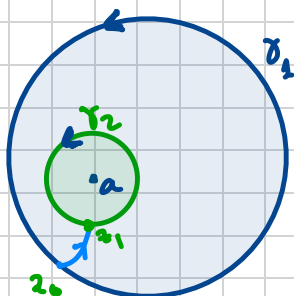
Seja $R > 0$ tal que

$$D_R(a) \subset \bar{D}$$

Sejam $\gamma_1 = \partial D$ e $\gamma_2 = \partial D(a)$,
com orientações positivas.

Tomemos $z_0 \in \gamma_1$ e

$z_1 \in \gamma_2$ e considere
um caminho $\tilde{\gamma}$
de z_0 a z_1 e
 $-\tilde{\gamma}$ o caminho
contrário (de z_1 a z_0)



Definimos Γ o caminho dado por

$$\Gamma = \gamma_1 \cup \tilde{\gamma} \cup (-\gamma_2) \cup (-\tilde{\gamma}) ; \text{ e então}$$

Γ é um caminho fechado, suave

por partes, e f fica holomorfe

no interior de Γ .

Então, pelo teorema de CAUCHY-GOURSAT segue que

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0 ; \text{ ou seja:}$$

$$\underbrace{0}_{\sim} = \int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1 \cup \tilde{\gamma} \cup (-\gamma_2) \cup (-\tilde{\gamma})} f(z) dz =$$

$$= \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz + \int_{-\gamma_2} f(z) dz + \int_{-\tilde{\gamma}} f(z) dz$$

$$= \int_{\gamma_1} f(z) dz + \cancel{\int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz} - \int_{\gamma_2} f(z) dz - \cancel{\int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz}$$

$$= \underbrace{\int_{\gamma_1} f(z) dz - \int_{\gamma_2} f(z) dz}_{\sim}$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz ;$$

ou seja, concluímos que

$$\int_{\partial D} f(z) dz = \int_{\partial D_r(\eta)} f(z) dz .$$

Dito, tem-se que

$$\left| \int_{\partial D} f(z) dz \right| = \left| \int_{\partial D(a)_R} f(z) dz \right| \leq \int_{\partial D(a)_R} |f(z)| dz ;$$

e como f é localmente limitada (por continuidade) no ponto a , segue que $\exists M > 0$, tal que $|f(z)| \leq M$;
 $\forall z \in (D_R(a) \cap \Omega) \setminus \{a\}$. Assim, a estimativa acima fica:

$$\left| \int_{\partial D} f(z) dz \right| \leq \int_{\partial D(a)_R} \overset{\leq M}{|f(z)|} dz \leq M \int_{\partial D(a)_R} dz = M \cdot 2\pi R \xrightarrow{R \rightarrow 0} 0$$

Portanto,

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 0 .$$

□

Este lema será crucial para provar o importante teorema que segue:

TEOREMA: (FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY)

Seja $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Para todo disco D , com $\bar{D} \subset \Omega$, vale a igualdade

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z) dz}{z - z_0} \quad ; \quad \forall z_0 \in D.$$

obs.: Note que, os valores de f dentro de um disco são definidos pelos pontos da fronteira da mesma!

DEMONSTRA Defina $g: \Omega \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$g(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Note que $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = f'(z_0)$; logo, g é

limitada numa vizinhança de z_0 . Além disso, g é holomorfa onde f o é, exceto em z_0 .

Então, pelo lema anterior, para qualquer disco D que contenha z_0 , e tal que $\bar{D} \subset \Omega$, tem-se

que

$$\int_{\partial D} g(z) dz = 0 \quad / \quad \text{i.e.};$$

$$0 = \int_{\partial D} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = \underbrace{\int_{\partial D} \frac{f(z) dz}{z - z_0} - \int_{\partial D} \frac{f(z_0) dz}{z - z_0}}$$

$$\Rightarrow f(z_0) \underbrace{\int_{\partial D} \frac{dz}{z - z_0}}_{2\pi i} = \int_{\partial D} \frac{f(z) dz}{z - z_0}$$

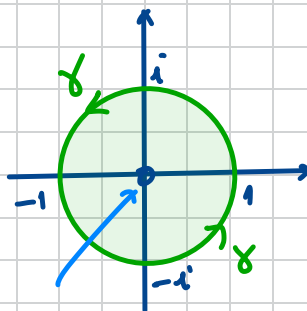
$$\Rightarrow f(z_0) \cdot 2\pi i = \int_{\partial D} \frac{f(z) dz}{z - z_0}$$

$$\Rightarrow f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z) dz}{z - z_0}$$

□

Ex: Calcule cada integral abaixo:

01) $\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz$



$\gamma: \{z: |z|=1\}$

$D = D_1(0)$

em $z=0$
f não está definida

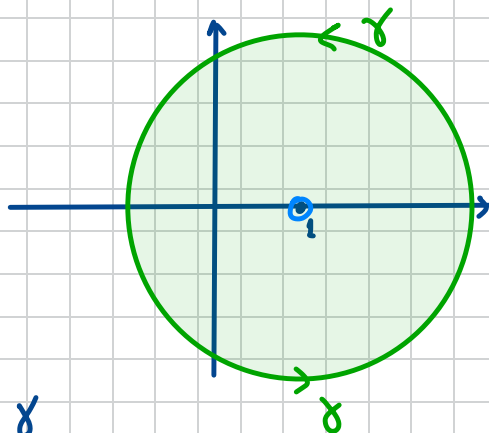
Considere $f(z) = e^z$. Então:

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{z} dz = \underbrace{2\pi i \cdot \frac{1}{2\pi i}}_{=1} \int_{\gamma} \frac{\overset{f(z)}{e^z}}{z-0} dz = 2\pi i \cdot \frac{e^0}{1} = 2\pi i$$

$f(0) = e^0 = 1$

02) $\int_{|z-1|=2} \frac{\cos z}{z-1} dz = ?$

$f(z) = \cos z$

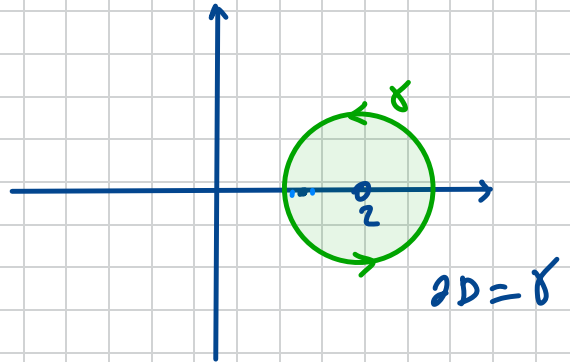


Dizem, temos; sendo $2D = \gamma$

$$\int_{|z-1|=2} \frac{\cos z}{z-1} dz = 2\pi i \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{\cos z}{z-1} dz \right)}_{f(1) = \cos 1} = 2\pi i \cdot \cos 1 = \underline{\underline{2\pi \cdot \cos 1 \cdot i}}$$

$$03) \int_{|z-2|=1} \frac{z^3 + 3z}{z-2} dz = ?$$

$$f(z) = z^3 + 3z$$



$$\int_{|z-2|=1} \frac{z^3 + 3z}{z-2} dz = 2\pi i \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-\underbrace{2}_{z_0}} dz \right)}_{f(2)} =$$

$$f(2) = (2)^3 + 3 \cdot 2 = 14$$

$$= 2\pi i \cdot 14 = \underline{\underline{28\pi i}}$$

TEOREMA: (DERIVAÇÃO SOB O SÍMBOLO DE INTEGRAÇÃO OU
TEOREMA GERAL DE CAUCHY)

Seja $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, então f é infinitamente derivável em Ω , ou seja, f possui derivadas de todas as ordens em Ω , sendo a n -ésima derivada dada por

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z) dz}{(z-z_0)^{n+1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

onde $z_0 \in D$, sendo D um disco tal que $\overline{D} \subset \Omega$.

DEMONSTRAÇÃO: É feita por indução sobre a ordem de derivação n . (não apresentada a prova em um vídeo)

EX: Calcule $\int_{|z|=1} \frac{\cos z dz}{(z-1)^2}$

$z = 1+i$

SOLUÇÃO:

$$\partial D = \gamma, \text{ onde } \gamma: \{z \in \mathbb{C}: |z|=1\}.$$

$$f(z) = \cos z$$

Usa fórmula geral de Cauchy, tem-se:

$$\int_{|z|=1} \frac{\cos z}{(z-1)^2} = 2\pi i \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{\cos z}{(z-1)^2}}_{= f'(z_0) = -\sin 1} = 2\pi i \cdot (-\sin 1) = \underline{\underline{-2\pi \cdot \sin 1 \cdot i}}$$

$\uparrow$
 $z_0 = 1$

COROLÁRIO: (DESIGUALDE DE CAUCHY) Se $f \in \mathcal{O}(D_R(z_0))$,

então

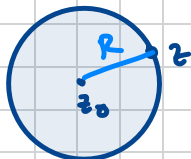
$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{M \cdot n!}{R^n}; \quad \forall n \in \{0, 1, 2, \dots\},$$

onde $M > 0$ e tal que $|f(z)| \leq M$.

DEMONSTRAÇÃO Usa fórmula geral de Cauchy:

$$\underline{\underline{|f^{(n)}(z_0)|}} = \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \right| =$$

$$= \frac{n!}{2\pi} \left| \int_{\partial D} \frac{f(z) dz}{(z-z_0)^{n+1}} \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_{\partial D} \frac{|f(z)| dz}{\underbrace{|z-z_0|^{n+1}}_R}$$



$$= \frac{n!}{2\pi} \frac{1}{R^{n+1}} \int_{\partial D} \underbrace{|f(z)|}_{\leq M} dz \leq \frac{M \cdot n!}{2\pi \cdot R^{n+1}} \int_{\partial D} dz =$$

$$= \frac{M \cdot n!}{\cancel{2\pi} \cdot R^{n+1}} \cdot \cancel{2\pi R} = \frac{M \cdot n!}{R^n}$$

□

exemplo: Seja f holomorfa em $\overline{D_1(2)}$ e suponha que $|f(z)| \leq 5$, $\forall z$ tal que $|z-2| \leq 1$. Dê uma estimativa para $|f^{(3)}(2)|$.

(exercício para entregar na sexta)